6. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

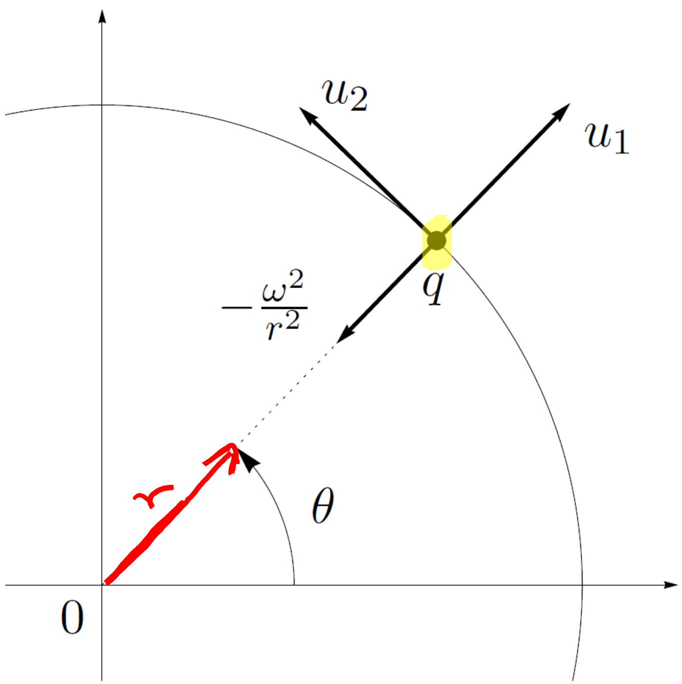
Steuerbarkeitsanalyse

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe: Analyse eines Satelliten-Modells

Betrachtet wird ein Modell eines Satelliten als Punktmasse mit $m = 1\text{kg}$



Bewegungsgleichungen des Satelliten:
(Newton'sche Gesetze - Polarkoordinaten)

$$\ddot{r} = \dot{r}\dot{\theta}^2 - \frac{\omega^2}{r^2} + u_1$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{u_2}{r}$$

a) Leiten Sie ein Differentialgleichungssystem für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ her, wobei $x_1 = r - 1$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \theta - \omega t$ und $x_4 = \dot{\theta} - \omega$.

$\dot{x}_1 = \dot{r} = x_2$

$\dot{x}_2 = \ddot{r}$

$\dot{x}_3 = \dot{\Theta} - \omega = x_4$

$\dot{x}_4 = \ddot{\Theta}$

$r = x_1 + 1$ $\quad$ $\Theta = x_3 + \omega t$

$\dot{r} = \dot{x}_1$ $\quad$ $\dot{\Theta} = x_4 + \omega$

$\ddot{r} = \dot{x}_2$ $\quad$ $\ddot{\Theta} = \dot{x}_4$

$$\ddot{r} = r\dot{\Theta}^2 - \frac{\omega^2}{r^2} + u_1 \qquad (1)$$

$$\ddot{\Theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\Theta}}{r} + \frac{u_2}{r} \qquad (2)$$

a) Leiten Sie ein Differentialgleichungssystem für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ her, wobei $x_1 = r - 1$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \theta - \omega t$ und $x_4 = \dot{\theta} - \omega$.

$$(1):\quad \dot{x}_2 = (x_1+1)\cdot(x_4+\omega)^2 - \frac{\omega^2}{(x_1+1)^2} + u_1$$

$$(2):\quad \dot{x}_4 = -\frac{2x_2(x_4+\omega)}{x_1+1} + \frac{u_2}{(x_1+1)}$$

$$\boxed{\dot{x} = f(x,u)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ (x_1+1)(x_4+\omega)^2 - \frac{\omega^2}{(x_1+1)^2} + u_1 \\ x_4 \\ -\frac{2x_2(x_4+\omega)}{x_1+1} + \frac{u_2}{(x_1+1)} \end{pmatrix}}_{f(x,u)}$$

$\longrightarrow$ **Linearisieren**

b) Zeigen Sie, dass die Linearisierung um $x^0 = (0,0,0,0)^T$ und $u^0 = (0,0)^T$ das in der Aufgabenstellung gegebene Zustandssystem ergibt.

$$\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\\ \dot x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (0+1)\cdot(0+\omega)^2 - \frac{\omega^2}{(0+1)^2} + 0 \\ 0 \\ -\frac{2\cdot 0(0+\omega)}{0+1} + \frac{0}{0+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

↳ Es handelt sich hierbei also um eine <u>Ruhelage</u>

b) Zeigen Sie, dass die Linearisierung um $\underline{x^0 = (0,0,0,0)^T}$ und $\underline{u^0 = (0,0)^T}$ das in der Aufgabenstellung gegebene Zustandssystem ergibt.

$$\underline{A_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0, u^0)} \qquad B_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(x^0, u^0)$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x^0 \\ \Delta u &= u - u^0 \end{aligned}$$

$$A_{1,2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0, u^0) = 1$$

$$A_{2,1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0, u^0) = (0+\omega)^2 - \frac{0 - 2\omega^2 \cdot 1}{1^4} = 3\omega^2$$

$$A_{2,4} = \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(x^0, u^0) = (0+1) \cdot 2(0+\omega) = 2\omega$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass die Linearisierung um $x^0 = (0,0,0,0)^T$ und $u^0 = (0,0)^T$ das in der Aufgabenstellung gegebene Zustandssystem ergibt.

$$B_{2,1} = \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(x^0, u^0) = 1$$

$$\longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{4,2} = \frac{\partial f_4}{\partial u_2}(x^0, u^0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta x = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u}$$

$\longrightarrow$ ab jetzt wird hiermit gearbeitet

c) Zeigen Sie für das lineare System aus b), dass es für einen beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^4$ ein Eingangssignal existiert, dass für ein $t \geq 0$ das Zustandssignal $\varphi(t, x_0, u) = (0,0,0,0)^T$ erreicht werden kann. → vollst. steuerbares System erf.

$$R(A,B) = \left(\begin{array}{cc|cc|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & 2w & -,- & -,- \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & -2w & 0 & & \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} \underbrace{}_{B} & \underbrace{}_{AB} & \underbrace{}_{A^2B} & \underbrace{}_{A^3B} \end{array}$$

Bereits vier lin. unabh. Vektoren vorhanden

$$\text{rang}\left[R(A,B)\right] = \underline{\underline{4 = n}}$$

↳ vollst. steuerbar

d) Erklären Sie, was die Wahl einer der in der Aufgabenstellung genannten Matrizen im Kontext des Satelliten bedeutet und beantworten sie jeweils die in c) gestellte Aufgabe

$$B_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0$$

$$\text{rang}\left(\overset{=0}{\tilde{\lambda}} \cdot I - [A, B_r]\right) = 4$$

$$\text{rang}\left(-[A, B_r]\right) = \text{rang}\,(A, B_r) = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 2\omega & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{lin. abh.}} \underline{< 4}$$

d) Erklären Sie, was die Wahl einer der in der Aufgabenstellung genannten Matrizen im Kontext des Satelliten bedeutet und beantworten sie jeweils die in c) gestellte Aufgabe

$$B_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(A, B_t) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{B_t} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\omega \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{A \cdot B_t} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 0 & 2\omega \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -4\omega^2 \end{matrix}}_{A^2 \cdot B_t} \middle| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\omega^3 \\ 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right)$$

$$A^2 \cdot B_t = A(A \cdot B_t)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ vollst. Steuerbarkeit

d) Erklären Sie, was die Wahl einer der in der Aufgabenstellung genannten Matrizen im Kontext des Satelliten bedeutet und beantworten sie jeweils die in c) gestellte Aufgabe

Ein Verlust eines Aktuators führt nicht zwangsläufig zum Verlust der vollst. Steuerbarkeit

d) Erklären Sie, was die Wahl einer der in der Aufgabenstellung genannten Matrizen im Kontext des Satelliten bedeutet und beantworten sie jeweils die in c) gestellte Aufgabe

$$B_{rt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ ein Eingangssignal was auf beide Zustände gleichzeitig wirkt

$$R(A, B_{rt}) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}}_{B_{rt}} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2w & 0 \\ 1 & 0 \\ -2w & 0 \end{matrix}}_{A \cdot B_{rt}} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 2w & 0 \\ -w^2 & 0 \\ -2w & 0 \\ -4w^2 & 0 \end{matrix}}_{A(A \cdot B_{rt})} \middle| \underbrace{\begin{matrix} -w^2 & 0 \\ -2w^3 & 0 \\ -4w & 0 \\ 2w^3 & 0 \end{matrix}}_{A(A^2 \cdot B_{rt})} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2w & -w^2 \\ 1 & 2w & -w^2 & -2w^3 \\ 0 & 1 & -2w & -4w^2 \\ 1 & -2w & -4w^2 & 2w^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang} = 4$$

↳ vollst. steuerbar

HA.

$$B_{tr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Falls das Zustandssystem aus b) für einen der Fälle aus d) nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine invertierbare Transformationsmatrix so, dass eine Transformation in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Teil erfolgt.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{1,1} & \tilde{A}_{1,2} \\ 0 & \tilde{A}_{2,2} \end{pmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

$(\tilde{A}_{1,1}, \tilde{B}_1)$ steuerbar

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11} \cdot \tilde{x}_1 + \tilde{A}_{1,2}\,\tilde{x}_2 + \tilde{B}_1 \cdot u$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{2,2}\,\tilde{x}_2$$

↳ nicht steuerbar

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{2,2} \cdot \tilde{x}_2} \arrow[d, "\tilde{x}_2"] & \\
{} \arrow[r, "u"] & \boxed{\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\,\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{1,2}\,\tilde{x}_2 + \tilde{B}_1 \cdot u} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

e) Falls das Zustandssystem aus b) für einen der Fälle aus d) nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine invertierbare Transformationsmatrix so, dass eine Transformation in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Teil erfolgt.

Basis $R(A, B_r)$ → alle lin unab Spaltenvektoren

$$R(A, B_r) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{B_r} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2\omega & 0 \end{matrix}}_{A \cdot B_r} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 \\ -2\omega & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{A^2 \cdot B_r} \middle| \underbrace{\begin{matrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2\omega^3 & 0 \end{matrix}}_{A^3 \cdot B_r} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cancel{-\omega^2} \\ 1 & 0 & -\omega^2 & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -2\omega & \cancel{0} \\ 0 & -2\omega & 0 & \cancel{2\omega^3} \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2\omega \end{pmatrix}$$

$$b_3 = -\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Falls das Zustandssystem aus b) für einen der Fälle aus d) nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine invertierbare Transformationsmatrix so, dass eine Transformation in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Teil erfolgt.

$$\tilde{A} = \underbrace{T^{-1}}_{} \cdot A \cdot T$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{\omega}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2\omega & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \frac{3\omega}{2} \\ 1 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\tilde{B} = T^{-1} \cdot B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

e) Falls das Zustandssystem aus b) für einen der Fälle aus d) nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine invertierbare Transformationsmatrix so, dass eine Transformation in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Teil erfolgt.

$$\tilde{A}_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ vollst steuerbar