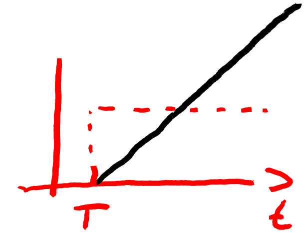
5. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

BIBO-Stabilität, Steuerbarkeit

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

BIBO - Stabilität



- BIBO – *bounded input* & *bounded output*

- Auf jedes beschränkte Eingangssignal $u(t) \in \mathbb{R}$ folgt beschränktes Ausgangssignal $\psi \in \mathbb{R}$
- Aus Vorlesung ist bekannt:
    - Wenn:

$$\lim_{t \to \infty} C \cdot e^{At} \cdot B = 0$$

    - Dann ist das Zustandssystem BIBO-stabil

- Außerdem gilt: Besitzen alle Eigenwerte von A negative Realteile (asymptotische Stabilität), dann ist das System BIBO-stabil.

- Beide Kriterien sind gleichwertig, wie im folgenden gezeigt wird.

Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

Gegeben ist das folgende Zustandssystem

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$
$$y = C \cdot x$$

mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das gegebene Zustandssystem BIBO-stabil ist.

Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} C\, e^{At} B = 0}$$

J: Jordan-Normalform

Eigenwerte:

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda+2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda+4 & 0 \\ -3 & \lambda+2 \\ 3 & 0 \end{matrix}$$

$$= (\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda+1) \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -1$$

Aufgabe 1: BIBO-Stabilität

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

$$J = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

λ_1, λ_2, λ_3

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

v_1, v_2, v_3

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}}_{e^{Jt}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t \to \infty} C \, e^{Jt} \, B$$

Aufgabe 2: Stabilität transformierter Systeme

Gegeben sind die beiden folgenden ähnlichen Zustandssysteme

Ü 2

$\tilde{A} = T A T^{-1}$

$\tilde{B} = T B$

$\tilde{C} = C T^{-1}$

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$
$$y = C \cdot x$$

und

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \cdot \tilde{x} + \tilde{B} \cdot u$$
$$y = \tilde{C} \cdot \tilde{x}$$

Wobei $\tilde{x} = T \cdot x$ gilt und die jeweiligen Matrizen den jeweils transformierten Matrizen des Zustandssystems entsprechen.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das Zustandssystem in x genau dann BIBO-stabil ist, wenn das Zustandssystem in $\tilde{x}$ BIBO-stabil ist.

Aufgabe 2: Stabilität transformierter Systeme

$$\lim_{t \to \infty} C \cdot e^{At} \cdot B = 0$$

$$e^{YXY^{-1}} = Y e^{X} Y^{-1}$$

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{C} \cdot e^{\tilde{A}t} \cdot \tilde{B} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to \infty} \underbrace{C \cdot T^{-1}}_{\tilde{C}} \cdot e^{\overbrace{TAT^{-1}}^{\tilde{A}} \cdot t} \cdot \underbrace{T \cdot B}_{\tilde{B}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to \infty} C \cdot T^{-1} \cdot T \, e^{A \cdot t} \, T^{-1} \cdot T \cdot B$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to \infty} C \cdot e^{At} \cdot B$$

Eine konst. Zustandstransformation ändert die Stabilität des Systems <u>nicht</u>

Steuerbarkeit eines Zustandssystems

- Ein System ist steuerbar, wenn für alle x_0, x_1 eine Zeit $t \geq 0$ existiert, in der das System mit einem **zulässigen** Eingangssignal $u(t)$ von Zustand x_0 in Zustand x_1 überführt werden kann.

- Zwei verschiedene Kriterien aus Vorlesung bekannt
  - Kalman: Die Steuerbarkeitsmatrix $R(A, B) = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$ besitzt vollen Rang, also $rang(R) = n$
  - Hautus: Für alle Eigenwerte λ_i von A besitzt die Matrix $[(\lambda_i I - A), B]$ vollen Rang, also $rang([(\lambda_i I - A), B]) = n$

Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

Gegeben ist das Zustandssystem $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ mit den Matrizen

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Aufgabe:</u> Zeigen Sie, dass das gegebene Zustandssystem steuerbar ist.

Steuerbarkeit hängt sowohl von <u>A als auch von B ab</u>

Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2B = A\,\overbrace{A \cdot B}$$

Kalman - Kriterium

$$R(A,B) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rang = 2

↳ vollst. Steuerbar

$$A^2B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Hautus-Kriterium</u> $\lambda_{1,2} = 0$

$$[(\lambda_i I - A), B] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Rang = 2</u>

$\hookrightarrow$ <u>vollst.</u> Steuerbar

Aufgabe 3: Steuerbarkeit eines Zustandssystems

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

teilweise steuerbar → nur mit Hautus-Krit. bestimmbar

↳ nur einzelne EW nicht steuerbar

Transformation: Trennung von nicht steuerbaren und steuerbaren EW

$$\dot{x}_1 = A_{11} \cdot x_1 + A_{12} x_2 + Bu$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u$$