3. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

Matrix-Exponentialfunktion

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

Gegeben sind die folgenden vier Matrizen:

e^{At}

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe:

Berechnen Sie für die gegebenen Matrizen jeweils die Matrix-Exponentialfunktion e^{At}. Beachten Sie dabei die in der Vorlesung erwähnten Spezialfälle

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

obere Dreiecksmatrix : $e^{At} = e^{\lambda t} \cdot e^{\overbrace{(A-\lambda I)}^{N} t}$

$\lambda_{1,2,3} = 2$

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ nilpotent

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{A_1 t} = e^{2t} \cdot e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} t & \frac{1}{2} e^{2t} t^2 \\ 0 & e^{2t} & e^{2t} t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$$b)\ \ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_2) = \det\begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda-2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda-4 & 0 \\ -3 & \lambda-2 \\ 3 & 0 \end{matrix}$$

$$= (\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

v_i : Eigenvektor zu λ_i

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

Gilt nur für Diagonalmatrizen!

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$$(\lambda_i I - A)x = 0 \quad \rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{A_2 t} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}^{T} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}}^{e^{\Lambda t}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{T^{-1}}$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$$e^{A_2 t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{t} - e^{2t} & e^{t} & 0 \\ -e^{t} + e^{2t} & -e^{t} + e^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$c)\ A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$I = id$

$$\det(\lambda I - A_3) = \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & -4 & -3 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & -2 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda-2)^3$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Jordan-Normalform von } A_3$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$$\tilde{B} = A - \lambda \underline{I} = A - 2\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{B}^3 = 0$$

Hinweis: $\tilde{B}^3 = \tilde{B}^2 \cdot \tilde{B}$

$\tilde{v}_1 = \ker \tilde{B}$ $\qquad \tilde{B}\tilde{v}_1 = 0$ $\qquad \rightarrow \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{v}_2 = \ker \tilde{B}^2$ $\qquad \tilde{v}_2 \notin \ker \tilde{B}$ $\qquad \tilde{B}^2 \tilde{v}_2 = 0$ $\qquad \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{v}_3 = \ker \tilde{B}^3$ $\qquad \tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$$T = \begin{pmatrix} \breve{B}^2 \breve{v}_3 & \breve{B} v_3 & \breve{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A_1$$

$$e^{A_3 t} = T \underbrace{e^{Jt}} T^{-1} = T e^{A_1 t} T^{-1}$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$$e^{A_3 t} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} t & \frac{1}{2} e^{2t} t^2 \\ 0 & e^{2t} & e^{2t} t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}_{e^{Jt} = e^{A_1 t}} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t}(t+1) & e^{2t} t (t+4) & e^{2t} t (t+3) \\ -e^{2t} t & -e^{2t}(t^2+2t-1) & -e^{2t} t (t+1) \\ e^{2t} t & e^{2t} t (t+2) & e^{2t}(t^2+t+1) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda \underline{I} - A_4) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & +2 \\ 2 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^2$$

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}$

$$e^{Jt} = \operatorname{diag}\left(e^{-3t}, e^{\tilde{A}t}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{\tilde{A}t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & \tilde{B}\tilde{v}_2 & \tilde{v}_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = A - \underbrace{\lambda}_{=-1} I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -3$$

$$\tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_1 \rightarrow \tilde{B}\tilde{v}_1 = 0 \Rightarrow \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 \rightarrow \tilde{B}^2 \cdot \tilde{v}_2 = 0 \Rightarrow \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{\tilde{A}t} = e^{t} \cdot e^{Nt}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{\tilde{A}t} = e^{t} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{t} & t \cdot e^{t} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{Jt} = \left(\begin{array}{c|c} e^{-3t} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} e^{t} & t \cdot e^{t} \\ 0 & e^{t} \end{matrix}}_{e^{\tilde{A}t}} \end{array} \right)$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

$$e^{A_4 t} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & te^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{T^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & \frac{1}{2}(e^{-3t} - e^{t}) \\ -2te^{t} & e^{t} & te^{t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Berechnung der Matrixexponentialfunktion

Fall 1: $\underbrace{\text{drei}}_{n}$ versch. Eigenwerte → Aufgabe b)

Fall 2: alle Eigenwerte identisch → Aufgabe c) & a)
↳ aufwendigste Fall

Fall 3: mehrere EW doppelt, aber nicht alle → Aufgabe d)