2. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

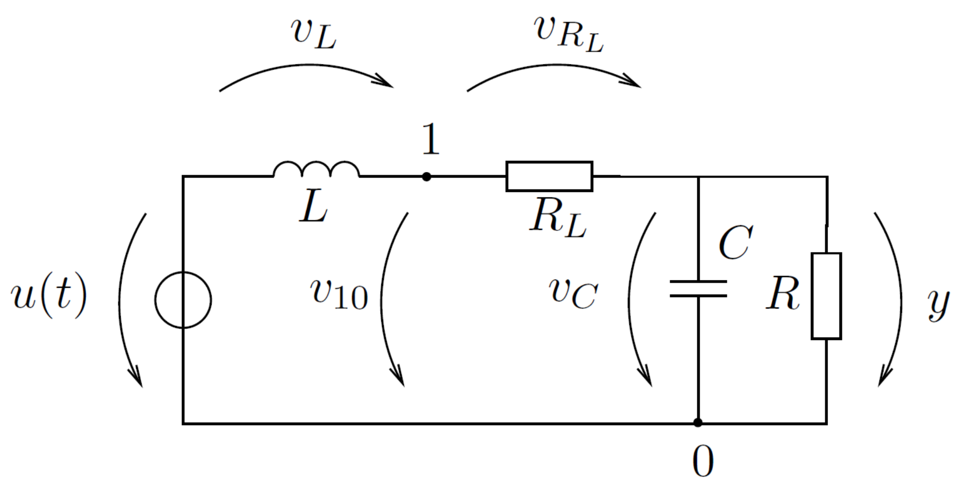
Zustandstransformation und Berechnung von Zustandssignalen

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Zustandstransformation

Gegeben ist das folgende elektrische Netzwerk:



Aufgaben

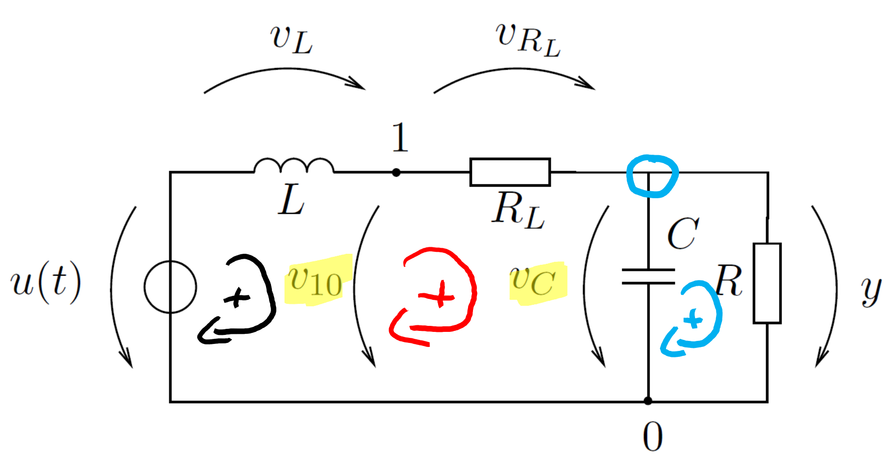
a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf

b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T, sodass für $\tilde{x} = (\phi, q)^T = Tx$ gilt

c) Ermitteln Sie mit Hilfe von b) das Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $\tilde{x}$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf



$v_{10} = v_{R_L} + v_C$ $\qquad v_L = u - v_{10}$

$\dot{v}_{10} = \underbrace{\dot{v}_{R_L}}_{R_L \frac{d}{dt} i_L = \frac{v_L}{L}} + \dot{v}_C$ $\qquad i_C = i_L - i_R$

$v_C = v_R = y$

$i_C = C \underbrace{\frac{d}{dt} v_C}_{\dot{v}_C} \Leftrightarrow \dot{v}_C = \frac{i_C}{C}$

$\Leftrightarrow \dot{v}_C = \frac{1}{C}(i_L - i_R)$

$= \frac{1}{C}\left(i_L - \frac{v_C}{R}\right)$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf

$$\dot{v}_{10} = \frac{R_L}{L}\underbrace{(u - v_{10})}_{= v_L} + \underbrace{\frac{i_L}{C} - \frac{v_C}{RC}}_{\dot{v}_C} \qquad i_L = i_{R_L} = \frac{v_{R_L}}{R_L}$$

$$= -\frac{R_L}{L} v_{10} - \frac{1}{RC} v_C + \frac{R_L}{L} u + \frac{\overbrace{v_{R_L}}^{= v_{10} - v_C}}{R_L C}$$

$$= \boxed{\left(\frac{1}{R_L C} - \frac{R_L}{L}\right)} \underline{v_{10}} + \boxed{\left(-\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC}\right)} \underline{v_C} + \frac{R_L}{L} \underline{u}$$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf

$$\dot{v}_C = \frac{1}{C}\left(i_L - \frac{v_C}{R}\right) = \frac{1}{C}\left(\frac{\overbrace{v_{R_L}}^{= v_{10} - v_C}}{R_L} - \frac{v_C}{R}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{R_L C}} \cdot \underline{v_{10}} + \boxed{\left(-\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC}\right)} \cdot \underline{v_C}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_L C} - \frac{R_L}{L} & -\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{R_L C} & -\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf

$$B = \begin{pmatrix} \frac{R_L}{L} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u = u(t)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = 0$$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T, sodass für $\tilde{x} = (\phi, q)^T = Tx$ gilt

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \phi \\ q \end{pmatrix}$$

ϕ: Fluss von L

q: Ladung von C

$$\phi = L \cdot i_L$$

$$q = C \cdot v_C$$

$$i_L = \frac{1}{R_L}(v_{10} - v_C)$$

$$\begin{pmatrix} \phi \\ q \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix}$$

$$= \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{L}{R_L} & -\frac{L}{R_L} \\ 0 & C \end{pmatrix}}^{T} \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

c) Ermitteln Sie mit Hilfe von b) das Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $\tilde{x}$

$$\dot{\tilde{x}} = T \cdot x = \underbrace{T A T^{-1}}_{\tilde{A}} \cdot \tilde{x} + \underbrace{T B}_{\tilde{B}} \cdot u$$

$$T^{-1} = \frac{R_L}{LC} \begin{pmatrix} C & \frac{L}{R_L} \\ 0 & \frac{L}{R_L} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix}$$

$$y = \underbrace{C T^{-1}}_{\tilde{C}} \tilde{x} + D \cdot u$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Es wird ein harmonischer Oszillator (mit Anregung) betrachtet, dessen Dynamik durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \cancelto{0}{u(t)},$$

wobei $\gamma \geq 0$ und $\omega > 0$ gilt.

<u>Aufgabe</u>

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \; \forall \, t \in \mathbb{R}$ → homogene Lsg.

b) $u(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ \mathrm{e}^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \; \forall \, t \in \mathbb{R}$

homogene Lsg $\varphi(t, x_0, u=0) = e^{At} x_0$

$e^{At} = T e^{Jt} \cdot T^{-1}$ J: Jordan-Normalform

$$A = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix} \longrightarrow \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+\gamma & -\omega \\ \omega & \lambda+\gamma \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+\gamma)^2 + \omega^2$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \;\forall\, t \in \mathbb{R}$

$$\underline{\lambda = -\gamma \pm i\omega}$$

$$J = \begin{pmatrix} -\gamma - i\omega & 0 \\ 0 & -\gamma + i\omega \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \qquad v_i : \text{Eigenvektor} \qquad T^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_j I - A)\,x = 0 \qquad \longrightarrow \qquad v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow T = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$j = 1,2 \qquad\qquad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0{,}0)^T \; \forall \, t \in \mathbb{R}$

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^{-\gamma t}}{2i} \begin{pmatrix} ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t} & e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \\ -e^{i\omega t} + e^{i\omega t} & ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

$$= e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\varphi = e^{At} \cdot x_0$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

b) $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$

$$\varphi(t, x_0, u(t)) = \underbrace{e^{At} x_0}_{\text{homogene Lsg.}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-s)} u(s)\, ds}_{\text{partikuläre Lsg.}}$$

$$\tilde{u}(t) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} -i e^{2i\omega t} \\ e^{2i\omega t} \end{pmatrix} = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \sin(2\omega t) - i \cdot \cos(2\omega t) \\ \cos(2\omega t) + i \cdot \sin(2\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t, x_0, u) = \varphi(t, x_0, \mathrm{Re}\{\tilde{u}\}) = \mathrm{Re}\{\varphi(t, x_0, \tilde{u})\}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

b) $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$

$$\int_0^t e^{A(t-s)}\tilde{u}(s)\,ds = e^{At}\int_0^t e^{-As}\tilde{u}(s)\,ds$$

$$e^{-As}\tilde{u}(s)$$

$$e^{-\gamma s}$$

$$= T e^{-Js} \underbrace{T^{-1}\begin{pmatrix} -i e^{2iws} \\ e^{2iws} \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2iws} \end{pmatrix}}$$

$$= T \cdot e^{-\gamma s}\begin{pmatrix} e^{\gamma s + iws} & 0 \\ 0 & e^{\gamma s - iws} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2iws} \end{pmatrix}$$

$$= T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^{iws} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

b) $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$

$$\tilde{\varphi} = e^{At} x_0 + T \begin{pmatrix} e^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{} \underbrace{\int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\omega s} \end{pmatrix} ds}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega t} - 1\right) \end{pmatrix}}$$

$$= e^{At} x_0 + \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega t} - 1\right) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

b) $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$

$$\tilde{\varphi} = e^{At} x_0 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega}\left(e^{-\gamma t + 2i\omega t} - e^{-\gamma t + i\omega t}\right) \\ \frac{1}{i\omega}\left(e^{-\gamma t + 2i\omega t} - e^{-\gamma t + i\omega t}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Re}\{\tilde{\varphi}\} = e^{At} x_0 + \frac{e^{-\gamma t}}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \cos(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) - \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\varphi = e^{-\gamma t} \left[\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} x_0 + \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \cos(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) - \sin(\omega t) \end{pmatrix} \right.$$