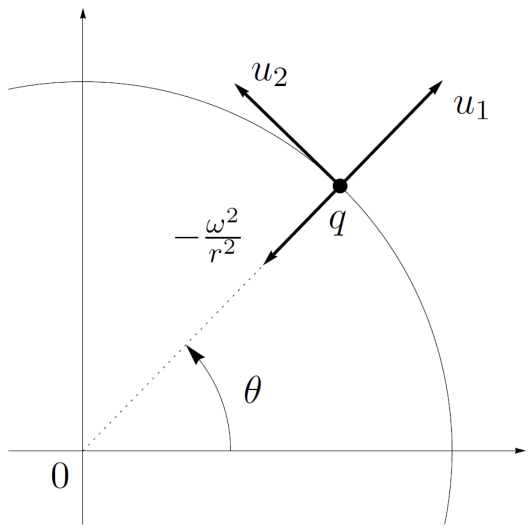
F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Moderne Methoden der Regelungstechnik, WT 2020

6. Übung, 16. November 2020

Thema: Steuerbarkeitsanalyse

Aufgabe 1. Analyse eines Satelliten-Modells
Betrachtet wird ein Modell eines Satelliten in einem Zentralkraftfeld, der seine Position mittels Steuerdüsen beeinflussen kann. Der Satellit wird als eine Punktmasse $m = 1\text{kg}$ mit Ortskoordinate $q \in \mathbb{R}^2$ betrachtet, auf welche eine radiale Kraft mit Betrag $\frac{-\omega^2}{|q|^2}$ sowie eine radiale bzw. tangentiale Kraft mit Betrag u_1 bzw. u_2 wirkt. Das vollständige Modell ist in der untenstehenden Abbildung dargestellt. Desweiteren gilt für $\omega > 0$, $r = |q|$ und θ bezeichnet den in der Abbildung dargestellten Winkel. Auf Basis der



Newton'schen Grundgesetze ergeben sich für die Bewegung des Satelliten in der Ebene die folgenden Differentialgleichungen in Polar-Koordinatenform:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{\omega^2}{r^2} + u_1\,,$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{u_2}{r}\,.$$

Aufgabe

a) Leiten Sie mit Hilfe der in der Aufgabenstellung angegeben Gleichungen ein Differentialgleichungssystem für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ her, wobei $x_1 = r - 1$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \theta - \omega t$ und $x_4 = \dot{\theta} - \omega$.

b) Zeigen Sie, dass die Linearisierung um $x^0 = (0,0,0,0)^T$ und $u^0 = (0,0)^T$ des in a) erhaltenen Differentialgleichungssystems auf das lineare Zustandssystem $\dot{x} = Ax + Bu$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

führt.

c) Zeigen Sie für das in Aufgabe b) hergeleitete lineare System, dass es für einen beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^4$ ein Eingangssignal $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ existiert, sodass für ein $t \geq 0$ das Zustandssignal $\varphi(t, x_0, u) = (0,0,0,0)^T$ erreicht werden kann.

d) Gegeben sind die folgenden alternativen Eingangsmatrizen für das linearisierte System aus Aufgabe b):

$$B_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{rt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Erklären Sie, was die Wahl einer dieser Eingangsmatrizen im Kontext des Satelliten bedeutet und beantworten Sie jeweils die in Aufgabe c) gestellte Aufgabenstellung.

e) Falls das Zustandssystem aus Aufgabe b) für eine der in Aufgabe d) betrachteten Eingangsmatrizen nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine invertierbare Transformations-Matrix $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass

$$\widetilde{A} := T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{1,1} & \widetilde{A}_{1,2} \\ 0 & \widetilde{A}_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} := T^{-1}B_r = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $(\widetilde{A}_{1,1}, \widetilde{B}_1)$ steuerbar ist.