F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Moderne Methoden der Regelungstechnik, WT 2020

Übung 5 - Lösung

Thema: BIBO-Stabilität, Steuerbarkeit

Aufgabe 1. BIBO-Stabilität
Gegeben ist das Zustandssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x \end{aligned}$$

mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe Zeigen Sie, dass das gegebene Zustandssystem BIBO-stabil ist.

Lösung Aufgabe 1. Nach Vorlesung 5 ist bekannt, dass ein System BIBO-stabil (*bounded-input-bounded-output*) ist, wenn es auf jedes beschränkte Eingangssignal $u(t) \in \mathbb{R}$ mit einem beschränkten Ausgangssignal $\psi(\cdot, 0, u(t)) \in \mathbb{R}$ antwortet. Nach Satz 15 der Vorlesung ist bekannt, dass ein System BIBO-stabil ist, wenn

$$\lim_{t \to \infty} C \cdot \mathrm{e}^{At} \cdot B = 0$$

gilt. Ebenso gilt laut der Folgerung von Satz 15 (Satz 16), dass ein System BIBO-stabil ist, wenn alle Eigenwerte von A einen negativen Realteil besitzen. Dieser Zusammenhang soll nun im Folgenden anhand des gegeben Beispiels gezeigt werden. Es gilt also zunächst die Eigenwerte von A zu berechnen. Mit Hilfe der Regel von Sarrus ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \lambda+4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda+2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda+4 & 0 \\ -3 & \lambda+2 \\ 3 & 0 \end{matrix}$$
$$= (\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda+1)\,,$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -1$$

Alle Eigenwerte von A besitzen also einen negativen Realteil. Nach Satz 16 ist das System also BIBO-stabil. Nun gilt es noch zu zeigen, dass Satz 15 und Satz 16 gleichwertig sind. Dafür muss zunächst die Matrix-Exponentialfunktion berechnet werden. Da die Matrix A drei unterschiedliche Eigenwerte besitzt, kann diese direkt mit Hilfe der Jordan-Normalform mit

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{T^{-1}JtT} = T\mathrm{e}^{Jt}T^{-1}$$

berechnet werden. Es wird also noch die Transformationsmatrix T gesucht. Mit den drei zugehörigen Eigenvektoren ergibt sich die Matrix T zu:

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich die Matrix-Exponentialfunktion berechnen:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{At} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}}_{\mathrm{e}^{Jt}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-4t} & 0 & 0 \\ -2\mathrm{e}^{-4t} + 3\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-4t} - \mathrm{e}^{-t} & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun lässt sich der gesuchte Grenzwert direkt berechnen:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-4t} & 0 & 0 \\ -2\mathrm{e}^{-4t} + 3\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-4t} - \mathrm{e}^{-t} & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(-\mathrm{e}^{-4t} + \mathrm{e}^{-2t}\right) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Das Ergebnis bestätigt also zunächst, dass das System nach Satz 15 BIBO-stabil ist. Durch formales Aufschreiben des Terms $C \cdot \mathrm{e}^{At} \cdot B$ zeigt sich, dass ein System immer dann BIBO-stabil ist, wenn alle Eigenwerte der System-Matrix A negative Realteile besitzen:

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es wird deutlich, dass der Grenzwert allein von der Matrix-Exponentialfunktion abhängt, da die Matrizen B und C konstant sind. Und da die Zeitabhängigkeit der Matrix-Exponentialfunktion nur von den Eigenwerten der Matrix A abhängt, ist der betrachtete Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} C \cdot \mathrm{e}^{At} \cdot B$ immer genau dann gleich Null, wenn das System nur Eigenwerte mit negativen Realteilen besitzt. Demnach ist das System in diesem Fall immer BIBO-stabil.

Aufgabe 2. Stabilität transformierter Systeme
Gegeben sind die beiden folgenden ähnlichen Zustandsysteme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}\,. \end{aligned}$$

Es gilt $A, \tilde{A} = TAT^{-1} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $B, \tilde{B} = TB \in \mathbb{F}^{n\times m}$ und $C, \tilde{C} = CT^{-1} \in \mathbb{F}^{q\times n}$. Desweiteren beschreibt $T \in \mathbb{F}^{n\times n}$ die Zustandstransformation, die den Zustandsvektor x in den Zustandsvektor $\tilde{x}$ überführt.

Aufgabe Zeigen Sie, dass das Zustandssystem x genau dann BIBO-stabil ist, wenn das Zustandssystem $\tilde{x}$ BIBO-stabil ist.

Lösung Aufgabe 2. Wie bereits in Aufgabe 2 behandelt, ist ein System genau dann BIBO-stabil, wenn

$$\lim_{t\to\infty} C \cdot \mathrm{e}^{At} \cdot B = 0$$

gilt. Laut Aufgabenstellung ist das Zustandssystem $\tilde{x}$ BIBO-stabil, daher gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{C} \cdot \mathrm{e}^{\tilde{A}t} \cdot \tilde{B} = 0\,.$$

Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{C} \cdot \mathrm{e}^{\tilde{A}t} \cdot \tilde{B} &= \underbrace{CT^{-1}}_{\tilde{C}} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{TAT^{-1}t}}_{\mathrm{e}^{\tilde{A}t}} \cdot \underbrace{TB}_{\tilde{B}} \\ &= C\,\underbrace{T^{-1}T}_{=I}\,\mathrm{e}^{At}\,\underbrace{T^{-1}T}_{=I}\,B \\ &= C\mathrm{e}^{At}B\,. \end{aligned}$$

Es zeigt sich also, dass die beiden Ausdrücke $\tilde{C} \cdot \mathrm{e}^{\tilde{A}t} \cdot \tilde{B}$ und $C\mathrm{e}^{At}B$ der gegebenen

Systeme identisch sind. Da die BIBO-Stabilität vom Grenzwert dieser beiden Ausdrücke abhängt, ist also das Zustandssystem x dann BIBO-stabil, wenn Zustandssystem $\tilde{x}$ BIBO-stabil ist. Die Zustandstransformation hat also keinen Einfluss auf die BIBO-Stabilität eines Zustandssystems.
Hinweis: Die Umformung in dem gezeigten Beweis

$$\mathrm{e}^{YXY^{-1}} = Y\mathrm{e}^{X}Y^{-1}$$

gilt allgemein für alle invertierbaren Matrizen Y.

Aufgabe 3. Steuerbarkeit eines Zustandssystems
Gegeben ist das Zustandssystem $\dot{x} = Ax + Bu$ mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe Zeigen sie, dass das gegebene Zustandssystem steuerbar ist.

Lösung Aufgabe 3. Nach Vorlesung 5 ist ein System steuerbar, wenn für alle $x_0, x_1 \in \mathbb{F}^n$ eine Zeit $t \geq 0$ existiert, in der das System mit einem zulässigen Eingangssignal $u(t)$ von x_0 in x_1 überführt wird. Für den Nachweis der Steuerbarkeit gibt es zwei Kriterien:

1. Kalman-Kriterium: Die Steuerbarkeitsmatrix $R(A, B) = [B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B]$ besitzt vollen Rang. Also $rang(R) = n$.

2. Hautus-Kriterium: Für alle Eigenwerte λ_i von A besitzt die Matrix $[(\lambda_i I - A),\ B]$ vollen Rang. Also $rang([(\lambda_i I - A),\ B]) = n$.

Die Anwendbarkeit der beiden Kriterien wird im Folgenden an dem gegebenen System gezeigt.

1. Kalman-Kriterium:

$$\begin{aligned} R(A, B) &= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Es wird sofort deutlich, dass der Rang von der Matrix $R(A, B) = 2 = n$ ist. Somit ist das gegebene System nach dem Kalman-Kriterium steuerbar

2. Hautus-Kriterium:
   Beim Betrachten der Matrix A fällt sofort auf, dass diese bereits Jordan-Normalform besitzt und die 0 der einzige Eigenwert ist. Es ist also nur für den Eigenwert 0

die Bedingung von Hautus zu prüfen. Es folgt unmittelbar:

$$
\begin{aligned}
[(\lambda_i I - A),\, B] &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Es ist sofort erkennbar, dass der Rang der erhaltenen Matrix gleich 2 ist und auch gleich n. Das System ist nach dem Hautus-Kriterium also steuerbar.