F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Moderne Methoden der Regelungstechnik, WT 2020

Übung 3 - Lösung

Thema: Matrixexponentialfunktion

Aufgabe 1. Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion
Gegeben sind die folgenden vier Matrizen:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe Berechnen Sie für die gegebenen Matrizen A_1 bis A_4 jeweils die Matrix-Exponentialfunktion e^{At}. Beachten Sie dabei die in der Vorlesung 3. erwähnten Spezialfälle.

Lösung Aufgabe 1.

a) Matrix A_1 ist eine obere Dreiecksmatrix, sodass sich die Eigenwerte direkt ablesen lassen. Es ergibt sich also für A_1 mit $\lambda_{1,2,3} = 2$ ein dreifacher Eigenwert. Nach der Vorlesung ist bekannt, dass eine Dreiecksmatrix mit nur einem Eigenwert wie folgt umgeformt werden kann:

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{(A-\lambda I)t} .$$

Dabei entsteht ein Produkt aus einem Skalar und einer nilpotenten Matrix. Aus der Vorlesung ist ebenfalls bekannt, dass sich die Matrix-Exponentialfunktion einer nilpotenten Matrix direkt über die Reihe

$$\mathrm{e}^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k t^k}{k!}$$

berechnen lässt. Es genügt also, die allgemeine Reihe zur Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion bis zum $n-1$-Glied auszuwerten, wobei n der Dimension von A entspricht.

Es gilt also:

$$\mathrm{e}^{A_1 t} = \mathrm{e}^{2t} \cdot \mathrm{e}^{N \cdot t}$$

mit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix N ist wie bereits erwähnt nilpotent, sodass $\mathrm{e}^{N \cdot t}$ direkt über die Reihe (mit $n = 3$) berechenbar ist:

$$\exp(Nt) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die gesuchte Matrix unmittelbar:

$$\mathrm{e}^{A_1 t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}t & \frac{1}{2}e^{2t}t^2 \\ 0 & e^{2t} & e^{2t}t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

b) Die Matrix A_2 ist eine allgemeine 3x3 Matrix, sodass es zunächst erforderlich ist, die Jordan-Normalform der Matrix zu bestimmen. Dazu werden zunächst die Eigenwerte mit

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

berechnet. Die Eigenwerte einer 3x3 Matrix lassen sich beispielsweise mit der Regel von Sarrus berechnen:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 & -1 \\ 3 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda - 4 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 \\ 3 & 0 \end{matrix}$$
$$= (\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 1)\,.$$

Das charakteristische Polynom ergibt sich also zu

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 1)\,,$$

woraus die drei Eigenwerte 4,2 und 1 unmittelbar folgen. Die Jordan-Normalform ergibt sich also sofort:

$$T^{-1}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}T\,.$$

Um die Matrix-Exponentialfunktion mit $\mathrm{e}^{At}=\mathrm{e}^{T^{-1}JT}=T\mathrm{e}^{J}T^{-1}$ zu berechnen, muss noch die Transformationsmatrix T berechnet werden, welche sich in dem Fall von drei verschiedenen Eigenwerten aus den jeweiligen Eigenvektoren ergibt, die mit Hilfe von

$$(\lambda I - A)x = 0$$

ermittelt werden können. Diese ergeben sich zu:

$$T=\left(\begin{array}{c|c|c}1&0&0\\1&1&-1\\-1&0&1\end{array}\right).$$

Somit ergibt die Matrix-Exponentialfunktion zu:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{At}&=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}}_{T}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{4t}&0&0\\0&\mathrm{e}^{2t}&0\\0&0&\mathrm{e}^{1t}\end{pmatrix}}_{\mathrm{e}^{Jt}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}}_{T^{-1}}\\&=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{4t}&0&0\\-\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{4t}&\mathrm{e}^{2t}&-\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{4t}&0&\mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

c) Von der Matrix A_3 gilt es ebenfalls zunächst die Jordan-Normalform zu bestimmen. Dazu werden zunächst die Eigenwerte von A_3 benötigt. Analog zur Aufgabe b) ergeben sich die Eigenwerte als die Nullstellen von

$$\det\begin{pmatrix}\lambda-3&-4&-3\\1&\lambda&1\\-1&-2&\lambda-3\end{pmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=(\lambda-2)^3\,,$$

also ist $\lambda=2$ ein 3-facher Eigenwert. Da in diesem Fall ein Eigenwert mehrfach auftritt, ist die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte höhere als dessen geometrische Vielfachheit, weshalb zur Berechnung der Transformationsmatrix T die Hauptvektoren benötigt werden. Hierzu werden zunächst

$$\tilde{B}:=A-\lambda I=A-2I=\begin{pmatrix}1&4&3\\-1&-2&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$$

sowie

$$\tilde{B}^2=\begin{pmatrix}0&2&2\\0&-2&-2\\0&2&2\end{pmatrix}$$

berechnet. Außerdem gilt $\tilde{B}^3 = 0$. Zunächst wird der Kern von $\tilde{B}$ benötigt, welcher sich mit

$$\ker \tilde{B} = \tilde{v}_1 \quad \text{mit} \quad \tilde{B} \cdot \tilde{v}_1 = 0$$

berechnet. Also gilt $\tilde{v}_1 = (1, -1, 1)^T$. Desweiteren wird ein Vektor $\tilde{v}_2 \in \ker \tilde{B}^2$ gesucht, für den $\tilde{v}_2 \notin \ker \tilde{B}$ gilt. Der Vektor $\tilde{v}_2 = (0, -1, 1)^T$ erfüllt diese Bedingung. Außerdem wird ein Vektor $\tilde{v}_3 \in \ker \tilde{B}^3$ gesucht, für den $\tilde{v}_3 \notin \ker \tilde{B}^2$ gilt. Der Vektor $\tilde{v}_3 = (0, 0, 1)^T$ erfüllt diese Bedingung. Damit lässt sich dann wie Transformationsmatrix T zu

$$T = \begin{pmatrix} \tilde{B}^2\tilde{v}_3 & \tilde{B}\tilde{v}_3 & \tilde{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

berechnen. Damit folgt schlussendlich die Jordan-Normalform der Matrix A_3 zu:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es fällt unmittelbar auf, dass die Jordan-Normalform der Matrix A_3 der Matrix A_1 entspricht. Es gilt also:

$$\mathrm{e}^{A_2 t} = \mathrm{e}^{(TA_1T^{-1})t} = T\mathrm{e}^{A_1 t}T^{-1}.$$

Der Ausdruck $\mathrm{e}^{A_1 t}$ wurde ja bereits in Aufgabe a) berechnet, sodass sich für $\mathrm{e}^{A_3 t}$ ergibt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{A_3 t} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}t & \frac{1}{2}e^{2t}t^2 \\ 0 & e^{2t} & e^{2t}t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}_{\mathrm{e}^{A_1 t}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t}(t+1) & e^{2t}t(t+4) & e^{2t}t(t+3) \\ -e^{2t}t & -e^{2t}\left(t^2+2t-1\right) & -e^{2t}t(t+1) \\ e^{2t}t & e^{2t}t(t+2) & e^{2t}\left(t^2+t+1\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

d) Zunächst gilt es wieder, die Jordan-Normalform von A_4 zu berechnen. Das charakteristische Polynom von A_4 ist $\chi_A(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-1)^2$, die Eigenwerte von A sind also 1 und -3, wobei der Eigenwert 1 doppelt vorkommt. Es stimmen also die algebraische und die geometrische Vielfachheit nicht überein. Die Jordan-Normal-Form von A_4 ist daher nach der Vorlesung 3 wie folgt gegeben:

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt für die Matrix-Exponentialfunktion wie bereits bekannt:

$$\mathrm{e}^{A_4 t} = T\mathrm{e}^{Jt}T^{-1}\,.$$

Für die Berechnung von $\mathrm{e}^{A_4 t}$ wird also die Transformationsmatrix T sowie der Ausdruck e^{Jt} benötigt. Für den Eigenwert -3 reicht für den entsprechenden Eintrag in T die Kenntnis eines Eigenvektors; Eigenvektor zu $\lambda = -3$ ist $v_1 = (1, 0, 2)^T$. Um geeignete Hauptvektoren für den Eigenwert 1 zu bestimmen, gilt es wie in Aufgabe c) zunächst $\tilde{B} = A - \lambda I$ und $\tilde{B}^2$ zu berechnen:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Für $\tilde{v}_1 = (0, 1, 0)^T$ gilt $\ker \tilde{B} = \tilde{v}_1$. Es ist also nun ein $\tilde{v}_2 \in \ker \tilde{B}^2$ gesucht, so dass $\tilde{v}_2 \notin \ker \tilde{B}$ gilt. Der Vektor $\tilde{v}_2 = (1, 0, 0)^T$ erfüllt diese Bedingung. Es ergibt sich also die Transformationsmatrix zu:

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & \tilde{B}\tilde{v}_2 & \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung von e^{Jt} lässt sich die Jordan-Normalform offensichtlich wie folgt

$$\left(\begin{array}{c|cc} -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

in zwei kleinere Diagonalmatrizen aufspalten, sodass sich die Matrix-Exponentialfunktion von J also wie in Vorlesung 3 vorgestellt auch wie folgt berechnen lässt:

$$\mathrm{e}^{Jt} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-3t}, \mathrm{e}^{\tilde{A}t})\,,$$

wobei mit $\tilde{A}$ die untere Diagonalmatrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus der Jordan-Normalform J bezeichnet wird. Die Matrix $\tilde{A}$ ist, wie die Matrix A_1, eine obere Dreiecksmatrix mit nur einem doppelten Eigenwert $\lambda = 1$, sodass sich zur Berechnung von $\mathrm{e}^{\tilde{A}t}$ das bereits aus Aufgabe a) bekannte Verfahren anwenden lässt:

$$\mathrm{e}^{\tilde{A}t} = \mathrm{e}^{1t} \cdot \mathrm{e}^{Nt} \quad \text{mit} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix N ist offensichtlich nilpotent, da es eine echte Dreiecksmatrix darstellt, weshalb sich e^{Nt} mit Hilfe der Reihenentwicklung bis $k = n - 1 = 2$ berechnen lässt. Damit ergibt sich $\mathrm{e}^{\tilde{A}t}$ zu:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\tilde{A}t} &= \mathrm{e}^{t} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & t\mathrm{e}^{t} \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Matrix e^{Jt} ergibt sich dann unmittelbar zu:

$$\mathrm{e}^{Jt} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} & t\mathrm{e}^{t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} .$$

Somit folgt für die Matrix-Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{A_4 t}$ wie zu Beginn der Aufgabe festgestellt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{A_4 t} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} & t\mathrm{e}^{t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{t}) \\ -2t\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{t} & t\mathrm{e}^{t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$