9. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

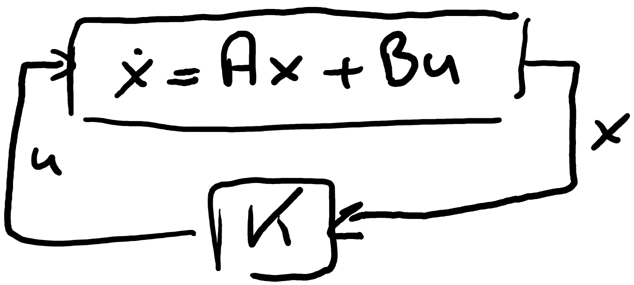
Beobachtbarkeit & Entwurf von Beobachtern

Felix Goßmann M.Sc.

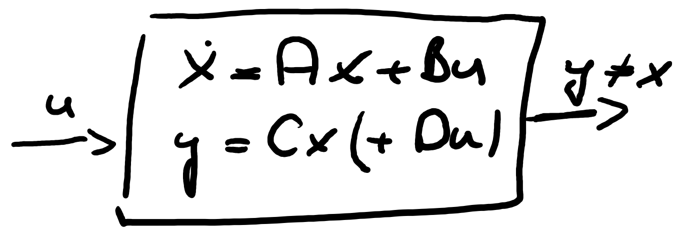
Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Lüneberger Beobachter

$u = K \cdot x$



Realität (meist)

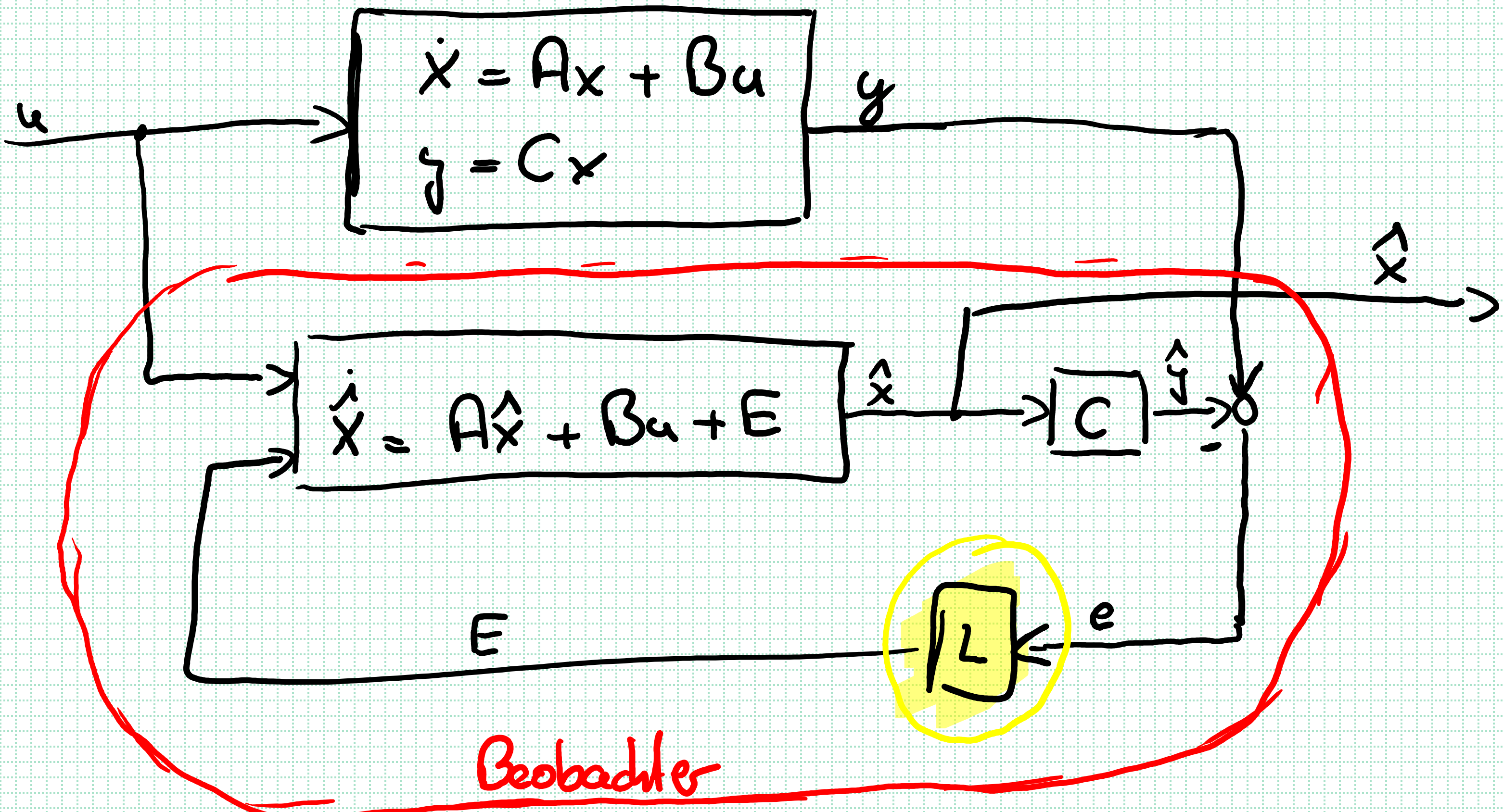


Beobachter: $\hat{x}$ aus der Messung y geschätzt

$\boxed{\hat{x} \approx x}$

- Einfachster Ansatz zum Beobachter-Entwurf
- „Regler“ der die Abweichungen zwischen Modell und Realität minimiert
- Messergebnisse werden fortlaufend mit Simulationsergebnissen verglichen
- Beobachter „regelt“ diesen Beobachterfehler, sodass dieser im Optimalfall verschwindet

Lüneberger Beobachter



Lüneberger Beobachter

Beobachter-Matrix $\hat{=}$ „K des Reglers"

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$$

andere Formen

- Kalman-Filter
- High-Gain Beobachter
- ...

$$e = \hat{x} - x \longrightarrow 0$$

$$\dot{e} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = (A + LC)e$$

Analogie zwischen Beobachter und Regler

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

Gegeben sind die folgenden beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei A die Systemmatrix und C die Ausgangsmatrix eines Zustandssystems darstellt.

Aufgaben:

a) Ist das Zustandssystem für (A, C) beobachtbar?

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert -1 besitzt.

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

a) Ist das Zustandssystem für (A, C) beobachtbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O(A,C) = \begin{pmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\left(R(A^T, C^T) \right)$$

$$O(A,C) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} C \\ \\ C \cdot A \\ \\ \\ \end{array}$$

$\text{Rang} = 3 = n$

vollst. beobachtbar

$\hookrightarrow R(A^T, C^T) \rightarrow$ vollst. steuerbar

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert -1 besitzt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle Entwurfsverfahren für Zustandsregler

Ersetzen (A, B) durch (A^T, C^T)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert -1 besitzt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ob (A^T, c_1^T) oder (A^T, c_2^T) steuerbar ist

$c_1 = (1\ 0\ 0)$ $\qquad c_2 = (0\ 1\ 0)$

$$R(A^T, c_1^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang} < n \Longrightarrow \text{vollst. steuerbar}$$

$$R(A^T, c_2^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang} < n$$

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert -1 besitzt.

G: $(A^T + C^T G,\ c_1^T)$ oder $(A^T + C^T G,\ c_2^T)$

vollst. steuerbar ist

Wählen: $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^T + C^T G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(A^T + C^T G, c_1^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang} = n$$

vollst. steuerbar

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert -1 besitzt.

Beobachter L mit dreifachem $\lambda = -1$

Ackermann-Formel: $\hat{L}^{T} = -(0,0,1)\, R(A^T + C^T G, c_1^T)^{-1}\, p(A^T + C^T G)$

$$R(A^T + C^T G, c_1^T)^T \xi = (0,0,1)^T \Longrightarrow \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{L}^T = \overbrace{(0,0,1)}^{-\xi^T}\, p(A^T + C^T G)$$

$$p(A^T + C^T G) = (A^T + C^T G + I)^3 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^3 = \dots = \begin{pmatrix} 19 & 23 & 9 \\ 14 & 19 & 5 \\ -5 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Beobachterentwurf mit Eigenwertzuweisung

b) Bestimmen sie eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ den dreifachen Eigenwert -1 besitzt.

$$\hat{L}^T = (0, 0, 1)\begin{pmatrix} 19 & 23 & 9 \\ 14 & 19 & 5 \\ -5 & -9 & 0 \end{pmatrix} = (-5, -9, 0)$$

$$L^T = G + e_1 \hat{L}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(-5, -9, 0)$$

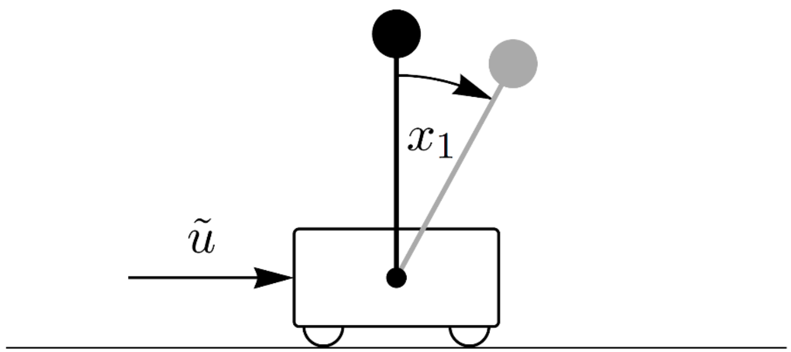
$$= \begin{pmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beobachter entsprechend schneller als Regler

$$L = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Inverses Pendel

Betrachtet wird ein Pendel mit der Masse m und Länge l, das wie folgt auf einem Wagen montiert ist.



Die Beschleunigung $\tilde{u}$ ist die Stellgröße des Systems, x_1 der angedeutete Winkel und g stellt die Erdbeschleunigung dar. Masse des Stabes und Reibung des Wagens wird vernachlässigt. Die Dynamik ist durch folgendes Differentialgleichungssystem gegeben

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= \omega^2 \sin x_1 - \tilde{u} \cdot \frac{\omega^2}{g} \cos x_1 \end{aligned}\right]$$

Aufgabe 2: Inverses Pendel

Aufgaben

a) Linearisieren Sie das DGL-System in der Ruhelage $x_1 = x_2, \tilde{u} = 0$ und erstellen daraus ein Zustandssystem in der bekannten Form. Es gilt $x = (x_1, x_2)^T$ und u(t) $= \tilde{u}(t)/g$. Der Winkel x_1 stellt die Ausgangsgröße dar.

b) Zeigen Sie, dass (A, B) steuerbar ist und bestimmen eine Zustandsrückführung $K \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, sodass $A + BK$ einen doppelten Eigenwert bei -1 hat.

c) Zeigen Sie, dass (A, C) beobachtbar ist und bestimmen ein $L \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ einen doppelten Eigenwert bei -1 hat.

d) Ist der geschlossene Kreis aus Strecke, Beobachter und Regler stabil?

Aufgabe 2: Inverses Pendel

a) Linearisieren Sie das DGL-System in der Ruhelage $x_1 = x_2, \tilde{u} = 0$ und erstellen daraus ein Zustandssystem in der bekannten Form. Es gilt $x = (x_1, x_2)^T$ und u(t) = $\tilde{u}(t)/g$. Der Winkel x_1 stellt die Ausgangsgröße dar.

$\dot{x}_1 = x_2$,

$\dot{x}_2 = \omega^2 sin\, x_1 - \tilde{u} \cdot \frac{\omega^2}{g} cos\, x_1$

$$A_{i,j} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_0 \qquad B_{i,j} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right|_0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Inverses Pendel

b) Zeigen Sie, dass (A, B) steuerbar ist und bestimmen eine Zustandsrückführung $K \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, sodass $A + BK$ einen doppelten Eigenwert bei -1 hat.

$$R(A,B) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}}_{\updownarrow} \longrightarrow \text{Rang } 2 \implies \text{vollst. steuerbar}$$

$$K = -(0,1)\, \overbrace{R(A,B)^{-1}}\, \rho(A) = (0,1)\, \frac{1}{\omega^4} \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \ldots = \underbrace{\left(\frac{1+\omega^2}{\omega^2} \;,\; \frac{2}{\omega^2} \right)}_{K}$$

$$\rho(A) = (A + I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 \end{pmatrix}^2$$

Aufgabe 2: Inverses Pendel

c) Zeigen Sie, dass (A, C) beobachtbar ist und bestimmen ein $L \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ so, dass der Beobachter $A + LC$ einen doppelten Eigenwert bei -1 hat. → -2

$$R(A^T, C^T) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow \text{Rang } 2 \longrightarrow \text{vollst. beobachtbar}$$

$$L^T = -(0, 1)\, R(A^T, C^T)^{-1} (A^T + I)^2$$

$$= \ldots = \left(-2 \quad , \quad -(\omega^2+1)\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} -2 \\ -(\omega^2+1) \end{pmatrix}$$

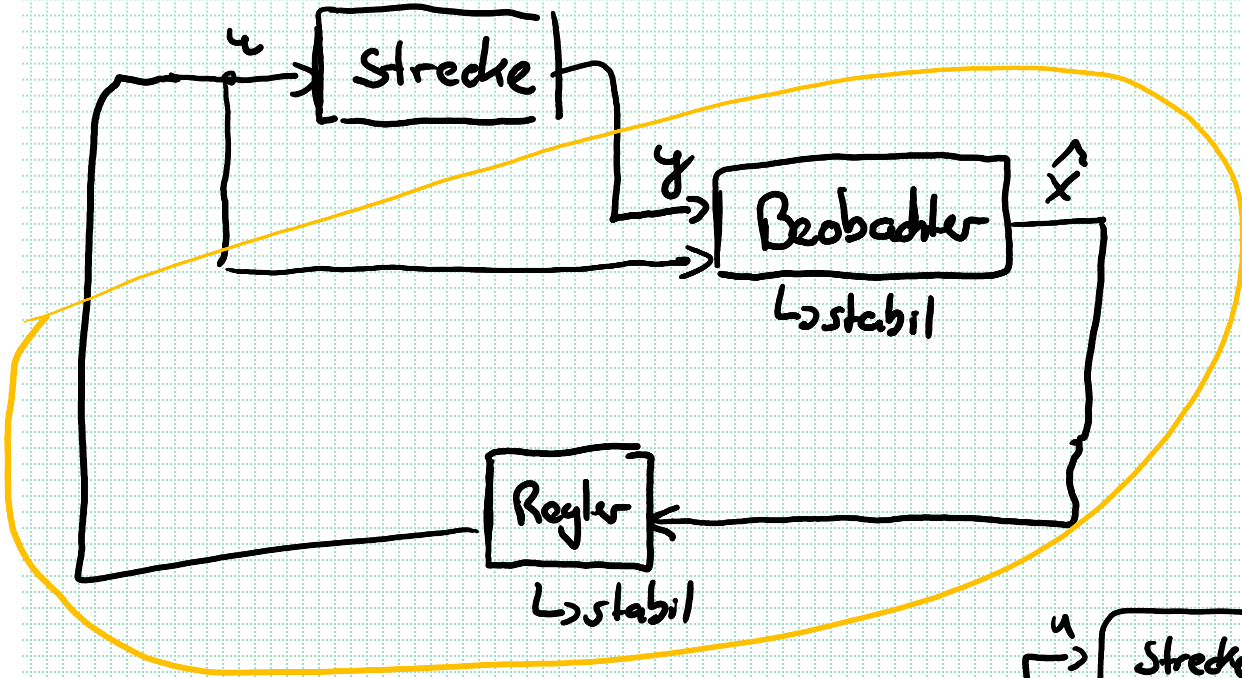
LQR-Regler

$A \longrightarrow A^T$

$B \longrightarrow C^T$

Aufgabe 2: Inverses Pendel

d) Ist der geschlossene Kreis aus Strecke, Beobachter und Regler stabil?



Seperationsprinzip

- Beobachter stabil ✓
- Regler stabil ✓

⇒ Schaltung aus Beobachter & Regler automatisch auch stabil

↪