8. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

Zustandsrückführung im MIMO-Fall, Beobachtbarkeit

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Eigenwertzuweisung im MIMO-Fall

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gegeben ist das Zustandssystem des Satelliten aus Übung 6:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{zwei Eingänge}}$$

mit $\omega > 0$

Aufgabe: Bestimmen sie ein $K \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, sodass -1 ein vierfacher Eigenwert von $A + BK$ ist.
Hinweis: Mit Nutzung von Aufgabe 2d) aus Übung 6 vereinfacht sich die Aufgabe

Aufgabe 1: Bestimmen sie ein $K \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, sodass -1 ein vierfacher Eigenwert von $A + BK$ ist.
Hinweis: Mit Nutzung von Aufgabe 2d) aus Übung 6 vereinfacht sich die Aufgabe

G, sodass $\underline{R(A+BG, Be_r)}$ vollständig steuerbar ist

e_r: Einheitsmatrix

G: „bestimmte" Verschaltung der Eingänge

Wenn $R(A, B\cdot e_r)$ steuerbar ist, $\underline{G=0}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Be_1 = B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Be_2 = B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nicht steuerbar

steuerbar üG.

Aufgabe 1:

$$b_2 = Be_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R(A, b_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

voller Rang, siehe Üb.

$\hat{K} \in \mathbb{R}^{1\times 4}$, sodass $A + b_2 \hat{K}$ den vierfachen EW $\lambda = -1$ besitzt

$$R(A,b_2)^T \xi = (0,0,0,1)^T$$

$$\hat{K} = -\underbrace{(0,0,0,1)\,R(A,b_2)^{-1}}_{\xi^T}(A+I)^4$$

Aufgabe 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2w & 1 & 0 \\ 2w & 0 & 0 & -4w^2 \\ 0 & -2w^3 & -4w^2 & 0 \end{pmatrix} \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6w^3} \\ -\frac{1}{3w^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{k} = -\xi^T \underbrace{(A+I)^4}$$

$$(A+I)^4 = \begin{pmatrix} -3w^4+18w^2+1 & 4-4w^2 & 0 & -2w(w^2-6) \\ -12w^2(w^2-1) & w^4-6w^2+1 & 0 & -8w(w^2-1) \\ -24w^3 & 2w(w^2-6) & 1 & 4-16w^2 \\ 6w^3(w^2-6) & 8w(w^2-1) & 0 & 4w^4-24w^2+1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{k} = \left(-6w - \frac{2}{w} \,,\; -\frac{1}{6w^3} + \frac{w}{2} - \frac{3}{w} \,,\; \frac{1}{3w^2} \,,\; -4 \right)$$

Aufgabe 1:

$K \in \mathbb{R}^{2\times 4}$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6\omega - \frac{2}{\omega} & -\frac{1}{6\omega^3} + \frac{\omega}{2} - \frac{3}{\omega} & \frac{1}{3\omega^2} & -4 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$(A + BK) \rightarrow$ hat den vierfachen EV $\lambda = -1$

Aufgabe 1: Eigenwertzuweisung im MIMO-Fall

Gegeben ist das folgende Zustandssystem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\omega > 0$

Aufgabe: Bestimmen sie ein $\boxed{K \in \mathbb{R}^{2\times 3}}$, sodass -1 ein dreifacher Eigenwert von $A + BK$ ist.

(A, Be_1)

$\rightarrow$ beides nicht vollst. steuerbar

(A, Be_2)

Aufgabe 1: Bestimmen sie ein $K \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, sodass -1 ein dreifacher Eigenwert von $A + BK$ ist.

$e_r = e_1$

$b_1 = Be_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Be_1$

$e_1 = u_0$

$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

linear unabhängig

$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ frei gewählt

l.u.

$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ frei gewählt

drei lin. unabhängige Vektoren

Aufgabe 1:

$$\left(u_1, u_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T G^T$$

Beispielweise

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_6 \end{pmatrix}$$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1:

$$A + BG = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_1 = Be_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R(A+BG,\, b_1) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} b_1 & (A+BG)b_1 & (A+BG)^2 b_1 \end{array} \end{array} \longrightarrow \text{vollst. steuerbar}$$

$$\hat{k} = -(0, 0, 1)\, R(A+BG,\, b_1)^{-1}\, p(A+BG)$$

$$R(A+BG,\, b_1)^T \tilde{\xi} = (0, 0, 1)^T \longrightarrow \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1:

$$\hat{k} = -(1,\ 0,\ 0) \cdot p(A+BG) \qquad p(A+BG) = (A+BG+I)^3$$

$$(A+BG) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{k} = -(1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} -2 & -6 & 4 \\ & * & \\ & * & \end{pmatrix} = (2, 6, -4)$$

$$K = G + e_1 \cdot (2 \quad 6 \quad -4) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1:

Kontrolle:

$$\dot{x} = \underbrace{(A + BK)}_{A_{cl}} x$$

$$BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{cl} = A + BK = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_{cl}) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ -3 & -6 & \lambda+4 \end{pmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = \underline{\underline{(\lambda+1)^3}}$$

Aufgabe 1:

Wahl einer beliebigen Matrix G

$b_1 = Be_1$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A + B\hat{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.

$$R(A + B\hat{G}, b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang } n = 3$$

$p(A+BG)$

$$K = -(0, 0, 1)\; R(A, B)^{-1}\; p(A)$$

Aufgabe 2: Zustandsrückführung und Beobachtbarkeit

Gegeben sind die Matrizen A,B und C

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgaben: a) Bestimmen Sie einen Regler K mit geeigneter Dimension derart, dass -2 ein dreifacher Eigenwert der Matrix $A + BK$ ist.

b) Ist das Zustandssystem (A, C) beobachtbar?

Aufgabe 2: a) Bestimmen Sie einen Regler K mit geeigneter Dimension derart, dass -2 ein dreifacher Eigenwert der Matrix $A + BK$ ist.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow b_1 \quad \uparrow b_2$

$R(A,B)$

$\downarrow$

volls(t). steuerbar sein

$$R(A,b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rang} < 3$$

$$R(A,b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rang} < 3$$

Aufgabe 2: a) Bestimmen Sie einen Regler K mit geeigneter Dimension derart, dass -2 ein dreifacher Eigenwert der Matrix $A + BK$ ist.

Wähle ein $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1.

$$A + BG = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 2.

Wahl von $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$R(A+BG,\ b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang } n = 3 \implies \text{vollst. steuerbar}$$ 3.

Aufgabe 2: a) Bestimmen Sie einen Regler K mit geeigneter Dimension derart, dass -2 ein dreifacher Eigenwert der Matrix $A + BK$ ist.

$$\hat{K} = -\underbrace{(0,0,1)\, R(A+BG, b_2)^{-1}}_{\xi^T}\, p(A+BG)$$

$$R(A+BG, b_2)^T \xi = (0,\ 0,\ 1)^T \longrightarrow \xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$p(A+BG) = (A+BG+2I)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3 = \dots = \begin{pmatrix} 20 & 14 & 0 \\ 28 & 20 & 0 \\ 12 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: a) Bestimmen Sie einen Regler K mit geeigneter Dimension derart, dass -2 ein dreifacher Eigenwert der Matrix $A + BK$ ist.

$$\hat{K} = -\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 20 & 14 & 0 \\ 28 & 20 & 0 \\ 12 & 14 & 8 \end{pmatrix} = \left(-2,\ -4,\ -4\right)$$

$$(A+\lambda_1 I)(A+\lambda_2 I)(A+\lambda_3 I)$$

$$K = G + e_2\hat{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(-2,\ -4,\ -4)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$(\check{A} + \check{B}K) \rightarrow$ dreifache $\lambda = -2$

Aufgabe 2: b) Ist das Zustandssystem (A, C) beobachtbar?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$y \longrightarrow x^*$

$y = Cx \quad (+Du)$

Kalman'sche Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}(A,C) = \begin{pmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathcal{O}(A,C) = R(A^T, C^T)}$$

Aufgabe 2: b) Ist das Zustandssystem (A, C) beobachtbar?

$$\mathcal{O}(A,C) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} C \\ C \cdot A \longleftarrow \\ C \cdot A^2 = (C \cdot A) A \end{array} \end{array}$$

Rang $n = 3$ $\longrightarrow$ vollst. beobachtbar ist

$R(A^T, C^T) \rightarrow$ vollst steuerbar $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{O}(A,C)$ vollst. beobachtbar