7. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

Steuerbarkeitsanalyse, Zustandsrückführung

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Parameterabhängige Steuerbarkeit

Gegeben ist das Zustandssystem $\dot{x} = Ax + Bu$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$

Aufgaben: a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die (A, B) steuerbar ist.

b) Bestimmen Sie für die nicht steuerbaren Fälle eine invertierbare Transformation $T \in \mathbb{R}^{3x3}$ so, dass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \; T^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt.

a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die (A, B) steuerbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A^2 \cdot B$

$A(A \cdot B)$

Steuerbarkeitsmatrix $R(A,B)$:

$$R(A,B) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & \alpha & 1 & \alpha^2 & 3+2(-2+\alpha)-\alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

B $\quad A \cdot B$

für $\alpha \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{lin unabhängig}$$

damit $\quad \text{Rang}\left[R(A,B)\right] = 3$

$\Longrightarrow$ vollst. steuerbar für $\alpha \neq 0$

a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die (A, B) steuerbar ist.

$\alpha = 0$: $\;\longrightarrow\;$ $R(A,B) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & \cancel{0} & 1 & \cancel{0} & -1 \\ 1 & 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 0 \\ 1 & 2 & \cancel{0} & -1 & \cancel{0} & 1 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

nur zwei lin. unabhängige Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ nicht vollst. steuerbar für $\alpha = 0$

b) Bestimmen Sie für die nicht steuerbaren Fälle eine invertierbare Transformation $T \in \mathbb{R}^{3x3}$

Lin. unabhängigen Vektoren aus $R(A,B)$ für $\alpha = 0$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\overbrace{0 \quad 1}^{\tilde{A}_{11}}} & \overbrace{2}^{\tilde{A}_{12}} \\ 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & \underbrace{-2}_{\tilde{A}_{22}} \end{array}\right)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

lin. unabhängige Ergänzung

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}}\right] \tilde{B}_1 \\ \vphantom{0} \end{array}$$

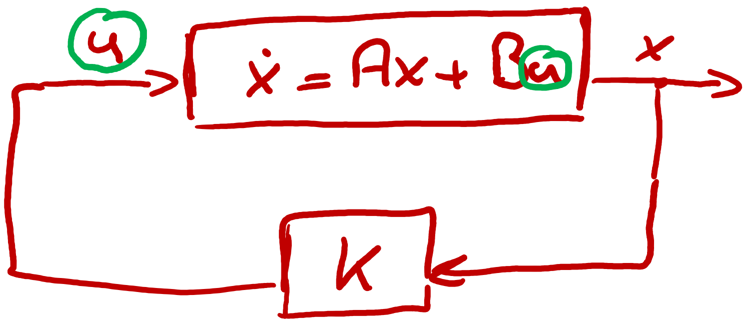
b) Bestimmen Sie für die nicht steuerbaren Fälle eine invertierbare Transformation $T \in \mathbb{R}^{3x3}$

$$\underbrace{\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{B}_1 u}_{\text{Zustandssystem des steuerbaren Teils}} + \underbrace{\tilde{A}_{12}\tilde{x}_2}_{\text{nicht steuerbare Einflüsse („Störung")}}$$

$$\underbrace{\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2}_{\text{autonome Dynamik}}$$

(nicht steuerbare Zustandsgrößen)

Zustandsrückführung



$$u = Kx$$

$$\dot{x} = Ax + BKx = \underbrace{(A + BK)}_{A_{neu}} x$$

- Viele Systeminformationen vorhanden
- Kleine Abweichungen sehr schnell & sehr gut korrigierbar
- Sehr gute Störunterdrückung und hohe Reglergüte erreichbar
- Viele (einfach umzusetzende) Verfahren verfügbar

- Nachteile:
    - Alle Zustande müssen gemessen werden und online verfügbar sein
    - Nicht immer möglich $\longrightarrow$ Beobachter
    - Vereinfachungen, Vernachlässigung von Zuständen

– Ordnungsreduktion

Aufgabe 1: Parameterabhängige Steuerbarkeit

Gegeben ist das Zustandssystem $\dot{x} = Ax + Bu$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ \alpha & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Aufgaben: a) Zeigen Sie, dass -2 und $-2 \pm \sqrt{1+\alpha}$ die Eigenwerte von A sind

b) Für welche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ist das Zustandssystem

(i) asymptotisch stabil?

(ii) steuerbar?

c) Bestimmen Sie $(0,0,1) \cdot R(A,B)^{-1}$ für $\alpha = 0, \beta \neq 0$

a) Zeigen Sie, dass -2 und $-2 \pm \sqrt{1+\alpha}$ die Eigenwerte von A sind

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ \alpha & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 - \alpha\lambda + 11\lambda - 2\alpha + 6$$

$\lambda = -2$ ist Lösung

$$(\lambda^3 + 6\lambda^2 - \alpha\lambda + 11\lambda - 2\alpha + 6) : (\lambda + 2) = \underbrace{\lambda^2 + 4\lambda + (3-\alpha)}$$

$$-2 \pm \sqrt{1+\alpha}$$

b) Für welche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ist das Zustandssystem (i) asymptotisch stabil?

$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_{2/3} = -2 \pm \sqrt{1+\alpha}$

↳ Grenzstabil ist nicht asymptotisch stabil

$$\mathrm{Re}\left(-2+\sqrt{1+\alpha}\right) = \begin{cases} -2+\sqrt{1+\alpha}, & \alpha \geq -1 \\ -2, & \alpha < -1 \end{cases}$$

$\alpha > 3 \;\rightarrow\;$ System instabil (vollständig)

$\boxed{\forall \beta \in \mathbb{R} \text{ und } \alpha < 3 \text{ ist das System asymptotisch stabil}}$

b) Für welche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ist das Zustandssystem (ii) steuerbar?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ \alpha & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SIMO

$$R(A,B) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & -3+\alpha \\ 0 & \beta & -5\beta+\alpha\beta \\ 1 & -3+\alpha & 9-3\alpha \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{ccc} B & AB & A^2B \end{array}$$

$\det R(A,B) = 0 \longrightarrow$ keinen vollen Rang

$$\det R(A,B) = -3\beta + 4\alpha\beta - \alpha^2\beta = -\beta(\alpha^2 - 4\alpha + 3) \overset{?}{=} 0$$

$\beta = 0 \longrightarrow$ nicht steuerbar

$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \implies \alpha = 1$ und $\alpha = 3$

$\boxed{\text{vollst. steuerbar, wenn } \beta \neq 0 \text{ und } \alpha \notin \{1,3\}}$

c) Bestimmen Sie $(0,0,1) \cdot R(A,B)^{-1}$ für $\alpha = 0, \beta \neq 0$

Ackermann-Formel: $K = -(0,0,1)\, R(A,B)^{-1} p(A)$

$\rightarrow$ nur im SIMO-Fall eindeutig lösbar

$$R(A,B)^T \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \xi^T = (0,0,1)\, R(A,B)^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad R(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \beta & -5\beta \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$R(A,B)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & -3 \\ -3 & -5\beta & 9 \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie $(0{,}0{,}1) \cdot R(A,B)^{-1}$ für $\alpha = 0, \beta \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & -3 \\ -3 & -5\beta & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\beta} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{(0,0,1) \cdot R(A,B)^{-1} = \vec{\xi}^{\,T} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{\beta}, -\frac{1}{3} \right)}}$$

Aufgabe 1: Parameterabhängige Steuerbarkeit

Gegeben ist das Zustandssystem $\dot{x} = Ax + Bu$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ \alpha & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Aufgaben:

d) Geben Sie für den Fall $\alpha = 0, \beta \neq 0$ die Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{3x3}$ an (abhängig von β), sodass $(TAT^{-1}, T^{-1}B)$ der Regelungsnormalform entspricht

e) Bestimmen Sie für den Fall $\alpha = 8, \beta \neq 0$ einen Regler $K \in \mathbb{R}^{1x3}$ (abhängig von β), sodass $(X+1)^3$ das charakteristische Polynom von $(A + BK)$ ist.
Welche Aussage über die asymptotische Stabilität des geschlossenen Kreises lässt sich daraus schließen?

d) Geben Sie für den Fall $\alpha = 0, \beta \neq 0$ die Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{3x3}$ an (abhängig von β), sodass $(\underline{TAT^{-1}}, \underline{T^{-1}B})$ der Regelungsnormalform entspricht

$$v = s^T \qquad \longrightarrow T = \begin{bmatrix} v \\ v \cdot A \\ v \cdot A^2 \\ \vdots \\ v \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{1} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} v \\ v \cdot A \\ v \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{\beta} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{\beta} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{\beta} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

e) Bestimmen Sie für den Fall $\alpha = 8, \beta \neq 0$ einen Regler $K \in \mathbb{R}^{1x3}$ (abhängig von β), sodass $(X+1)^3$ das charakteristische Polynom von $(A+BK)$ ist.

$$K = -\underbrace{(0, 0, 1)\, R(A,B)^{-1}}\ \underbrace{p(A)}$$

$$p(A) = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) = (A + I)^3$$

$$A + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ 8 & 0 & -3 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \beta \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^3 = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 12 \\ -24\beta & -1 & 15\beta \\ 96 & 0 & -40 \end{pmatrix} = p(A)$$

e) Bestimmen Sie für den Fall $\alpha = 8, \beta \neq 0$ einen Regler $K \in \mathbb{R}^{1x3}$ (abhängig von β), sodass $(X+1)^3$ das charakteristische Polynom von $(A+BK)$ ist.

$$R(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & \beta & 3\beta \\ 1 & 5 & -15 \end{pmatrix} \longrightarrow R(A,B)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 5 \\ 5 & 3\beta & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 5 \\ 5 & 3\beta & -15 \end{pmatrix} \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{35} \\ \frac{1}{7\beta} \\ -\frac{1}{35} \end{pmatrix}$$

$$K = -\overbrace{(0,0,1)\,\underline{R(A,B)}^{-1}}^{=\xi^T}(A+I)^3 = -\xi^T (A+I)^3$$

e) Bestimmen Sie für den Fall $\alpha = 8, \beta \neq 0$ einen Regler $K \in \mathbb{R}^{1x3}$ (abhängig von β), sodass $(X+1)^3$ das charakteristische Polynom von $(A+BK)$ ist.

$$K = -\left(\frac{1}{35}, \frac{1}{7\beta}, -\frac{1}{35}\right)\begin{pmatrix} -16 & 0 & 12 \\ -24\beta & -1 & 15\beta \\ 96 & 0 & -40 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{232}{35}, \frac{1}{7\beta}, -\frac{127}{35}\right)$$

e) Welche Aussage über die asymptotische Stabilität des geschlossenen Kreises lässt sich daraus schließen?

$\dot{x} = Ax + Bu$ $\qquad u = \underbrace{K}x$

$= Ax + BKx$

$\dot{x} = \underbrace{(A+BK)}x \longrightarrow (A+BK)$ hat den dreifachen EW $\lambda = -1$

vollst. steuerbar $\longrightarrow$ EW beliebig gewählt