# 6. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

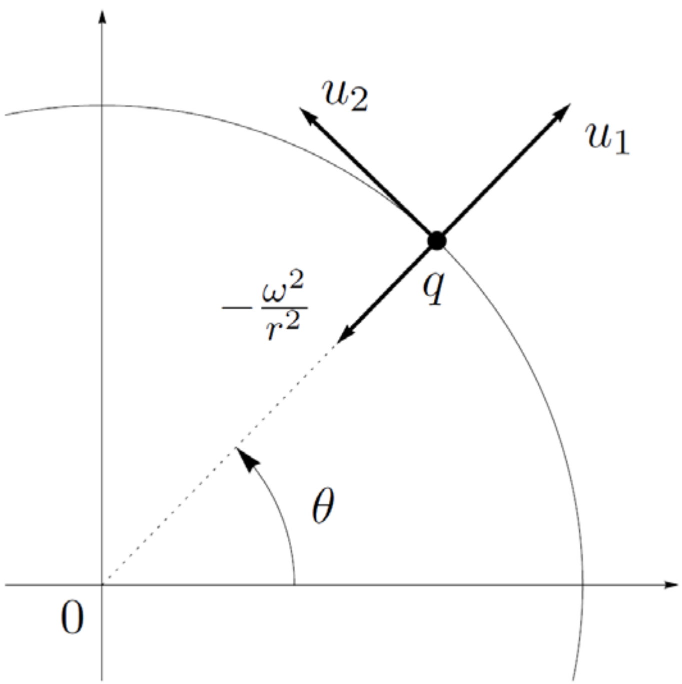
## Steuerbarkeitsanalyse

**Felix Goßmann M.Sc.**

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

## Aufgabe: Analyse eines Satelliten-Modells

Betrachtet wird ein Modell eines Satelliten als Punktmasse mit $m = 1\text{kg}$




Bewegungsgleichungen des Satelliten:
(Newton‘sche Gesetze - Polarkoordinaten)

$$\ddot{r} = \dot{r}\dot{\theta}^2 - \frac{\omega^2}{r^2} + u_1$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{u_2}{r}$$

a) Leiten Sie ein Differentialgleichungssystem für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ her, wobei $x_1 = r - 1$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \theta - \omega t$ und $x_4 = \dot{\theta} - \omega$.

$x_1 = r - 1$

$\dot{x}_1 = \dot{r} = x_2 \quad \longrightarrow \quad \dot{x}_2 = \ddot{r}$

$x_3 = \theta - \omega t$

$\dot{x}_3 = \dot{\theta} - \omega = x_4 \quad \longrightarrow \quad \dot{x}_4 = \ddot{\theta}$

$r = x_1 + 1$

$\dot{r} = \dot{x}_1$

$\ddot{r} = \dot{x}_2$

$\theta = x_3 + \omega t$

$\dot{\theta} = x_4 + \omega$

$\ddot{\theta} = \dot{x}_4$

a) Leiten Sie ein Differentialgleichungssystem für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ her, wobei $x_1 = r - 1$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \theta - \omega t$ und $x_4 = \dot{\theta} - \omega$.

$$\overbrace{\dot{x}_2}^{\ddot{r}} = \overbrace{(x_1+1)}^{r}\overbrace{(x_4+\omega)^2}^{\dot{\theta}^2} - \frac{\omega^2}{\underbrace{(x_1+1)^2}_{r^2}} + u_1$$

$$\overbrace{\dot{x}_4}^{\ddot{\theta}} = -\frac{2\overbrace{x_2}^{\dot{r}}\overbrace{(x_4+\omega)}^{\dot{\theta}}}{\underbrace{x_1+1}_{r}} + \frac{u_2}{\underbrace{x_1+1}_{r}}$$

DGL-System (nichtlin.) $\qquad \dot{x} = f(x, u)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ (x_1+1)(x_4+\omega)^2 - \frac{\omega^2}{(x_1+1)^2} + u_1 \\ x_4 \\ -\frac{2x_2(x_4+\omega)}{x_1+1} + \frac{u_2}{x_1+1} \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass die Linearisierung um $\underline{x^0 = (0,0,0,0)^T}$ und $\underline{u^0 = (0,0)^T}$ das in der Aufgabenstellung gegebene Zustandssystem ergibt.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ (0+1)\cdot(0+\omega)^2 - \frac{\omega^2}{(0+1)^2} + 0 \\ 0 \\ -\frac{2\cdot 0(0+\omega)}{0+1} + \frac{0}{0+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass die Linearisierung um $x^0 = (0,0,0,0)^T$ und $u^0 = (0,0)^T$ das in der Aufgabenstellung gegebene Zustandssystem ergibt.

$$A_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0, u^0) \qquad B_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(x^0, u^0)$$

$$A_{1,2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0, u^0) = 1$$

$$A_{2,1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0, u^0) = \dots = 3\omega^2$$

$$A_{2,4} = \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(x^0, u^0) = \dots = 2\omega$$

$$A_{3,4} = \frac{\partial f_3}{\partial x_4}(x^0, u^0) = 1$$

$$A_{4,2} = \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(x^0, u^0) = \dots = -2\omega$$

$$B_{2,1} = \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(x^0, u^0) = 1$$

$$B_{4,2} = \frac{\partial f_4}{\partial u_2}(x^0, u^0) = 1$$

b) Zeigen Sie, dass die Linearisierung um $x^0 = (0{,}0{,}0{,}0)^T$ und $u^0 = (0{,}0)^T$ das in der Aufgabenstellung gegebene Zustandssystem ergibt.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta x = x - x^0$

$\Delta u = u - u^0$

$$\boxed{\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u}$$

c) Zeigen Sie für das lineare System aus b), dass es für einen beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^4$ ein Eingangssignal existiert, dass für ein $t \geq 0$ das Zustandssignal $\varphi(t, x_0, u) = (0,0,0,0)^T$ erreicht werden kann.

$$R(A,B) = [B, A \cdot B, A^2 \cdot B, A^3 \cdot B]$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & 2w & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 1 & -2w & 0 & & \end{array}\right) \longrightarrow \text{Rang} = 4$$

$$\underbrace{\phantom{00}}_{B} \quad \underbrace{\phantom{00}}_{A \cdot B}$$

↳ vollst steuerbar

d) Erklären Sie, was die Wahl einer der in der Aufgabenstellung genannten Matrizen im Kontext des Satelliten bedeutet und beantworten sie jeweils die in c) gestellte Aufgabe

$$B_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verlust der tangentiale Steuerung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$

Hautus-Krit.

$$\text{rang}\left(0 \cdot I - A,\ B_r\right) = \text{rang}\left(-A, B_r\right) = \text{rang}\left(A, B_r\right)$$

lin. Ab.

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} < 4$$

$\Rightarrow$ nicht vollst. steuerbar

d) Erklären Sie, was die Wahl einer der in der Aufgabenstellung genannten Matrizen im Kontext des Satelliten bedeutet und beantworten sie jeweils die in c) gestellte Aufgabe

$$B_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verlust der radialen Steuerung

$$A^2 B_t = A(A \cdot B_t)$$
$$A^3 B_t = A(A^2 B_t)$$

$$R(A, B_t) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 2\omega & \cancel{0} & 0 \\ \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 2\omega & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & -2\omega^3 \\ \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & -4\omega^2 \\ \cancel{0} & 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & -4\omega^2 & \cancel{0} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} B_t & A \cdot B_t & A^2 B_t & A^3 B_t \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rang} = 4$$

↳ vollst. steuerbar

d) Erklären Sie, was die Wahl einer der in der Aufgabenstellung genannten Matrizen im Kontext des Satelliten bedeutet und beantworten sie jeweils die in c) gestellte Aufgabe

$$B_{rt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ $u_1$ wirkt auf beide DGL

$u_2$ wirkungslos

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$R(A, B_{rt}) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & \cancel{0} \\ 1 & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{0} \\ 1 & \cancel{0} \end{matrix}}_{B_{rt}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & \cancel{0} \\ 2\omega & \cancel{0} \\ 1 & \cancel{0} \\ -2\omega & \cancel{0} \end{matrix}}_{A \cdot B_{rt}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 2\omega & \cancel{0} \\ -\omega^2 & \cancel{0} \\ -2\omega & \cancel{0} \\ -4\omega^2 & \cancel{0} \end{matrix}}_{A^2 \cdot B_{rt}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} -\omega^2 & \cancel{0} \\ -2\omega^3 & \cancel{0} \\ -4\omega^2 & \cancel{0} \\ 2\omega^3 & \cancel{0} \end{matrix}}_{A^3 B_{rt}} \right)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\omega & -\omega^2 \\ 1 & 2\omega & -\omega^2 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & -2\omega & -4\omega^2 \\ 1 & -2\omega & -4\omega^2 & 2\omega^3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rang } 4$$

↳ vollst. steuerbar

d) Erklären Sie, was die Wahl einer der in der Aufgabenstellung genannten Matrizen im Kontext des Satelliten bedeutet und beantworten sie jeweils die in c) gestellte Aufgabe

- **nicht** $A^2$, $A^3$, usw berechnen, $A^2B = A(A \cdot B)$, usw
- $R(A,B)$ schrittweise aufstellen, jeden Schritt den Rang prüfen
- sofort erkennbare EW achten $\longrightarrow$ Hautus - Kriterium

e) Falls das Zustandssystem aus b) für einen der Fälle aus d) nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine invertierbare Transformationsmatrix so, dass eine Transformation in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Teil erfolgt.

System teilweise steuerbar

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}}_{\tilde{x}} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

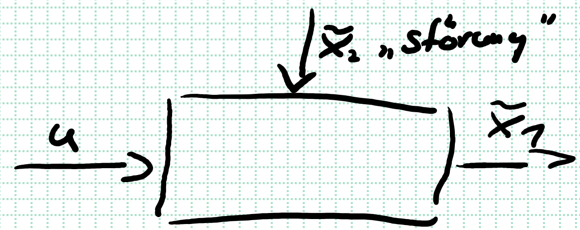
$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \to \text{steuerbare Teil} \\ \to \text{nicht steuerbar} \end{array}$$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_1 u$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{22} \cdot \tilde{x}_2$$

↳ autonomes System

$$\boxed{\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2}$$




$$\tilde{x} = T \cdot x$$

e) Falls das Zustandssystem aus b) für einen der Fälle aus d) nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine invertierbare Transformationsmatrix so, dass eine Transformation in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Teil erfolgt.

Basis von $R(A, B_r) \longrightarrow$ erster Fall aus c) $\quad B_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$R(A, B_r) = \left( \begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & \cancel{0} & 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & -\omega^2 & \cancel{0} \\ 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & -\omega^2 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & -2\omega & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} \\ 0 & \cancel{0} & -2\omega & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 2\omega^3 & \cancel{0} \end{array} \right)$$

$$\quad B_r \qquad\qquad A \cdot B_r \qquad\qquad A^2 \cdot B_r \qquad\qquad A^3 \cdot B_r$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{pmatrix}$$

lin. abh.

$$\underbrace{b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2\omega \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 \\ -2\omega \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Basis}}$$

e) Falls das Zustandssystem aus b) für einen der Fälle aus d) nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine invertierbare Transformationsmatrix so, dass eine Transformation in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Teil erfolgt.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{\omega}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2\omega & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

„sinnvolle" Ergänzung

$$\tilde{A}_{11} \qquad \tilde{A}_{12}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \frac{3\omega}{2} \\ 1 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A}_{22}$$

$$\tilde{B}_1$$

$$\tilde{B} = T^{-1} B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

e) Falls das Zustandssystem aus b) für einen der Fälle aus d) nicht steuerbar ist, bestimmen Sie eine invertierbare Transformationsmatrix so, dass eine Transformation in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Teil erfolgt.

$$\tilde{A}_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{1,1}\,\tilde{x}_1 + \tilde{B}_1\,u \qquad (+\,\tilde{A}_{1,2}\,\tilde{x}_2)$$