4. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

Stabilität von Systemen nach Lyapunov

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Stabilität

- Bisher:
  - Algebraische Stabilitätskriterien (Hurwitz, Routh) → nur SISO
  - Nyquist (Frequenzbereich) RT
  - Polstellen/Eigenwerte → allgemein immer gültig, LTI-Systemen

$$\dot{x} = \underline{A} x + \underline{B} u$$

- Gilt nur bei linearen und zeitinvarianten Systemen
- Allgemeines globales Stabiliätskriterium
  - Lyapunov

$$A^T P + PA < 0$$

für $P > 0$

LTI-Systeme

$$A^T P + PA = -Q$$

$$Q = I$$

P: Lyapunov-Matrix

Aufgabe 1: Lyapunov-Gleichung

Gegeben ist das folgende Zustandssystem $\dot{x} = A \cdot x$ mit

→ autonom ($B=0$)

≠ automatisch

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

<u>Aufgaben:</u> a) Lösen Sie die Lyapunov-Gleichung

$$\boxed{A^T P + PA = -Q,} \qquad P \in \mathbb{R}^{2x2}$$

für $Q = I$

b) Folgern Sie aus dem Resultat a), dass das Zustandssystem $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 1: Lyapunov-Gleichung

a) $A = \begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

$$\underset{A^T}{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_2 & x_3\end{pmatrix}}_{P} + \underset{P}{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_2 & x_3\end{pmatrix}}\underset{A}{\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & -2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2x_1 + 2x_2 & -4x_1 - 3x_2 + x_3\\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 & -8x_2 - 4x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ -4 & -3 & 1\\ 0 & -8 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Lyapunov-Gleichung

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{36} & -\frac{7}{36} \\ -\frac{7}{36} & \frac{23}{36} \end{pmatrix}$$

$$A^T P + P A = -Q$$

$\longrightarrow$ Definitheit ?

Aufgabe 1: Lyapunov-Gleichung

b) Folgern Sie aus dem Resultat a), dass das Zustandssystem $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil ist.

Aus der Vorlesung ist bekannt:

- Ein Zustandssystem ist global asymptotisch stabil, wenn die Lösung P der Gleichung $A^T P + PA = -Q$ **positiv definit** ist. → alle EW haben pos. Vorzeichen
- Definitheit: Aussage über die Vorzeichen der Eigenwerte
- Eine positiv definite Matrix besitzt demnach nur positive Eigenwerte
- Zur Bestimmung ist entweder Eigenwertberechnung erforderlich, oder aber Anwendung eines Definitheitskriterium

Aufgabe 1: Lyapunov-Gleichung

Kriterium nach Sylvester:

- Aussage ob Matrix positiv oder negativ definit ist, falls nicht ist keine Aussage möglich
- Hauptminoren einer Matrix berechnen (Determinanten aller Untermatrizen)

- Alle Hauptminoren positiv → Matrix positiv definit
- Erster Hauptminor negativ, zweiter positiv, dritter negativ, usw → Matrix negativ definit
- Sonst, keine Aussage möglich

- Da nur positive Definitheit von Interesse ist, reicht das Sylvester-Kriterium für die Stabilitätsbetrachung aus

Aufgabe 1: Lyapunov-Gleichung

$$P = \begin{pmatrix} \frac{11}{36} & -\frac{7}{36} \\ -\frac{7}{36} & \frac{22}{36} \end{pmatrix}$$

H_1 H_2

$\det H_1 = \frac{11}{36} > 0$

$\det H_2 = \frac{17}{108} > 0$

$\hookrightarrow$ P positiv definit

$\Rightarrow \dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil

Aufgabe 2: Stabilität nach Lyapunov

Gegeben ist die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Aufgabe:</u> Zeigen Sie mit Hilfe der Lyapunov-Gleichung, dass das Zustandssystem $\boxed{\dot{x} = A \cdot x}$ asymptotisch stabil ist

Aufgabe 2: Stabilität nach Lyapunov

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}}_{P} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Mx = b$$

Aufgabe 2: Stabilität nach Lyapunov

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & \\
\end{array}\\
\left(\begin{array}{cccccc|c|c}
(-1\ -1) & (1+1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & (1) \\
\cdot & (-1-2) & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & (2) \\
-2 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & (3) \\
\cdot & (-2-1) & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & (4) \\
\cdot & \cdot & \cdot & (-2-2) & (1+1) & \cdot & -1 & (5) \\
\cdot & -2 & \cdot & \cdot & -2 & 1 & 0 & (6) \\
-2 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & (7) \\
\cdot & -2 & \cdot & \cdot & -2 & 1 & 0 & (8) \\
\cdot & \cdot & (-2-2) & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & (9)
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Aufgabe 2: Stabilität nach Lyapunov

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
-2 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\
\cdot & -3 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\
-2 & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & -4 & -2 & \cdot & -1 \\
\cdot & -2 & \cdot & \cdot & -2 & 1 & 0 \\
\cdot & \cdot & -4 & \cdot & \cdot & \cdot & -1
\end{array}\right]$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
-2 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\
\cdot & -3 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 0 \\
-2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & -4 & -2 & \cdot & -1 \\
\cdot & -2 & 1 & \cdot & -2 & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -4 & -1
\end{array}\right]$$

Aufgabe 2: Stabilität nach Lyapunov

$$
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccccc|c}
2 & -2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & -2 & \cdot & \cdot & 1 & -1 & 1 \\
\cdot & \cdot & -3 & 2 & 6 & 2 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & -2 & 3 & -5 & 3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -4 & 10 & -7 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 1
\end{array}\right] \\
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_6 & x_4 & x_5 & x_3
\end{array}
\end{array}
$$

$$x_3 = \frac{1}{4}$$

$$x_5 = \left(-7 - 10 \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{19}{8}$$

$$x_4 = \left(3 + \frac{5}{4} - \frac{3 \cdot 19}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{16}$$

$$x_6 = \ldots = \frac{47}{8}$$

$$x_2 = \ldots = \frac{9}{16}$$

$$x_1 = \ldots = \frac{17}{16}$$

Aufgabe 2: Stabilität nach Lyapunov

$$P = \begin{pmatrix} \frac{17}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{16} & \frac{23}{16} & \frac{19}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{19}{8} & \frac{47}{8} \end{pmatrix}$$

$$\det H_1 = \frac{17}{16} > 0$$

$$\det H_2 = \det \begin{pmatrix} \frac{17}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{9}{16} & \frac{23}{16} \end{pmatrix} = \frac{155}{128} > 0$$

$$\det H_3 = \det \begin{pmatrix} \frac{17}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{16} & \frac{23}{16} & \frac{19}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{19}{8} & \frac{47}{8} \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{17}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{9}{16} & \frac{23}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{19}{8} \end{matrix} = \frac{435}{256} > 0$$

P positiv definit $\longrightarrow$ $\dot{x} = Ax$ global asymptotisch stabil

Aufgabe 2: Stabilität nach Lyapunov

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\frac{\text{Zählerpolynom}}{\text{Nennerpolynom}}$$

SRT → Übertragungsfkt.

RT → Stabilität aus EW von A geschlussfolgert

heute: $A^T P + PA = -Q$

$$\boxed{\text{Stabilität hängt nur von A-Matrix ab}}$$