2. Übung zur Vorlesung „Moderne Methoden der Regelungstechnik“

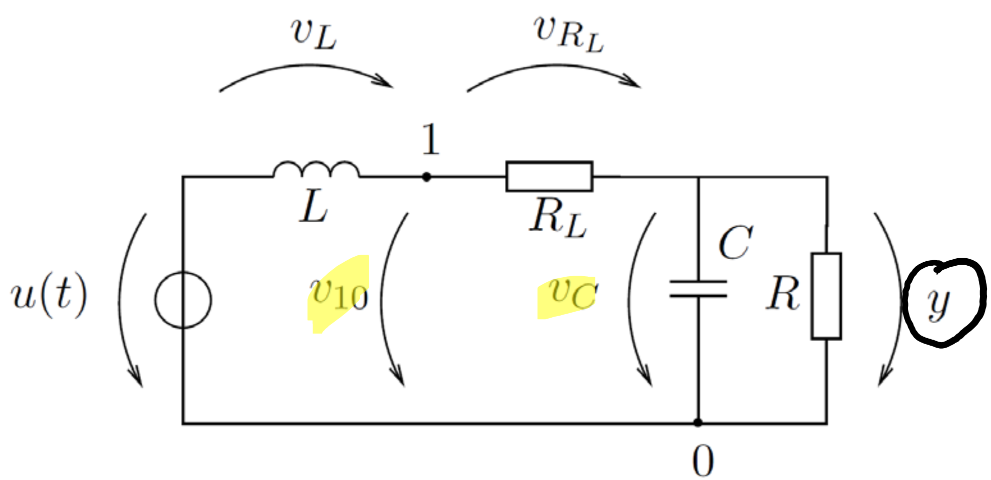
Zustandstransformation und Berechnung von Zustandssignalen

Felix Goßmann M.Sc.

Institut für Steuer- und Regelungstechnik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Aufgabe 1: Zustandstransformation

Gegeben ist das folgende elektrische Netzwerk:



Aufgaben

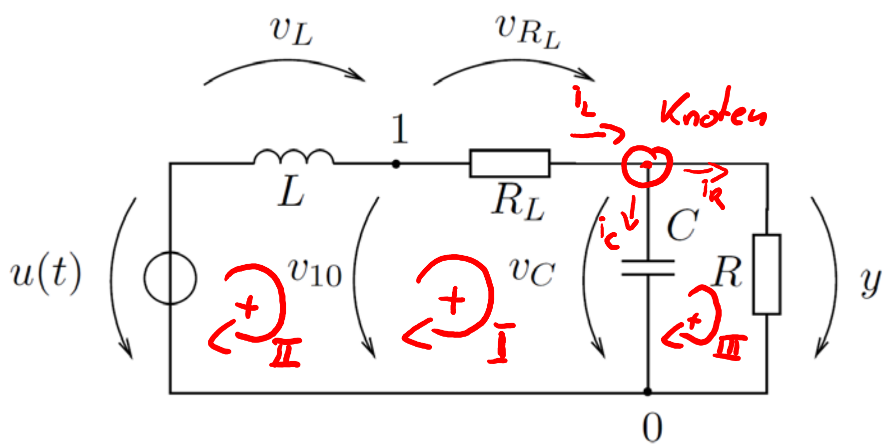
a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf

b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T, sodass für $\tilde{x} = (\phi, q)^T = Tx$ gilt

c) Ermitteln Sie mit Hilfe von b) das Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $\tilde{x}$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf



I: $v_{10} = v_{R_L} + v_C = R_L \cdot i_R + v_C$

$i_L = i_R$

$\dot{v}_{10} = R_L \cdot \frac{d}{dt} i_L + \frac{d}{dt} v_C$

II: $v_L = u - v_{10}$

III: $v_C = v_R = y$

<u>Knoten:</u>

$i_C = i_L - i_R$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf

Kondensator: $i_C = C \cdot \frac{d}{dt} v_C \Rightarrow \frac{d}{dt} v_C = \frac{i_C}{C} = \frac{1}{C}(i_L - i_R)$

$$= \frac{1}{C}\left(i_L - \frac{v_R}{R}\right)$$

$$= \frac{1}{C}\left(i_L - \frac{v_C}{R}\right)$$

$v_{10} - v_C$

$i_L = \frac{v_{R_L}}{R_L}$

$v_L = u - v_{10}$

$$\frac{d}{dt} v_{10} = R_L \cdot \frac{v_L}{L} + \frac{1}{C}\left(i_L - \frac{v_C}{R}\right) = \frac{R_L}{L}(u - v_{10}) + \frac{i_L}{C} - \frac{v_C}{RC}$$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf

$$\frac{d}{dt} v_{10} = \frac{R_L}{L}(u - v_{10}) - \frac{v_C}{RC} + \frac{\overbrace{v_{R_L}}^{v_{10} - v_C}}{R_L C}$$

$$\dot{v}_{10} = \ldots = \left(\frac{1}{R_L C} - \frac{R_L}{L}\right) v_{10} + \left(-\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC}\right) v_C + \frac{R_L}{L} u$$

$$\frac{d}{dt} v_C = \frac{1}{C}\left(\frac{v_{10} - v_C}{R_L} - \frac{v_C}{R}\right)$$

$$\dot{v}_C = \frac{1}{R_L C} v_{10} + \left(-\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC}\right) v_C$$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

a) Stellen Sie das entsprechende Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $x = (v_{10}, v_C)^T$ auf

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x = \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{10} \\ \dot{v}_C \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{R_L C} - \frac{R_L}{L} & -\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{R_L C} & -\frac{1}{R_L C} - \frac{1}{RC} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{R_L}{L} \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix} + \underbrace{0}_{D} \cdot u$$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T, sodass für $\underline{\tilde{x} = (\phi, q)^T} = Tx$ gilt

$\phi = L \cdot \underline{i_L}$

$q = C \cdot \underline{v_C}$

$$\begin{pmatrix} \phi \\ q \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix}$$

$$i_L = \frac{v_{10} - v_C}{R_L}$$

$\phi = \frac{L}{R_L}(v_{10} - v_C)$

$q = C \cdot v_C$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \phi \\ q \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{L}{R_L} & -\frac{L}{R_L} \\ 0 & C \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} v_{10} \\ v_C \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

c) Ermitteln Sie mit Hilfe von b) das Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $\tilde{x}$

T $\qquad \tilde{x} = Tx \longrightarrow \underline{x = T^{-1} \cdot \tilde{x}}$

T muss invertierbar sein

$$\dot{\tilde{x}} = T\underbrace{\dot{x}} = TAx + T\underbrace{Bu}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\tilde{x}} = \underbrace{TAT^{-1}}_{\tilde{A}}\tilde{x} + \underbrace{TB}_{\tilde{B}}u$$

$$y = C\underline{x} + Du = \underbrace{CT^{-1}}_{\tilde{C}}\tilde{x} + Du$$

Aufgabe 1: Zustandstransformation

c) Ermitteln Sie mit Hilfe von b) das Zustandsraum-Modell mit dem Zustandsvektor $\tilde{x}$

$$T^{-1} = \frac{R_L}{LC} \begin{pmatrix} C & \frac{L}{R_L} \\ 0 & \frac{L}{R_L} \end{pmatrix} \qquad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \phi \\ q \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Es wird ein harmonischer Oszillator (mit Anregung) betrachtet, dessen Dynamik durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + u(t)\,,$$

wobei $\gamma \geq 0$ und $\omega > 0$ gilt.

Aufgabe

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \; \forall\, t \in \mathbb{R}$ ⟶ kein Eingangssignal ⟶ homogene Lsg.

b) $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$ ⟶ komplette Lsg.

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \; \forall \, t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t, x_0, u(t)=0) = e^{At} x_0$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \lambda_2 & \\ \emptyset & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \underline{T} e^{Jt} T^{-1} \qquad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 1} & & \emptyset \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ \emptyset & & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$$

$$A = T J T^{-1}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \ \forall\, t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) \overset{\text{def}}{=} \left| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix} \right|$$

$$= (\lambda + \gamma)^2 + \omega^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma - i\omega \\ \lambda_2 &= -\gamma + i\omega \end{aligned}}$$

$$J = \begin{pmatrix} -\gamma - i\omega & 0 \\ 0 & -\gamma + i\omega \end{pmatrix}$$

$$T = (v_1 \quad v_2)$$

λ_1 mehrfach

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \; \forall \, t \in \mathbb{R}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_j I - A) v_j = 0$$

$$T = (v_1 \;\; v_2) = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

↳ nur unterschiedliche Eigenwerte

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

a) $u(t) = (0,0)^T \ \forall\, t \in \mathbb{R}$

$$e^{At} = \frac{e^{-\gamma t}}{2i} \begin{pmatrix} ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t} & e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \\ -e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} & ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t} \end{pmatrix} = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t, x_0, u(t)=0) = \underbrace{e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} x_0}_{\text{homogene Lösung}}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

b) $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ $\underline{u(t) = \mathrm{Re}\{\underline{\tilde{u}(t)}\}}$

$$\varphi(t, x_0, u(t)) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} u(s)\, ds$$

$$\tilde{\varphi}(t, x_0, \tilde{u}(t)) \longrightarrow \varphi(t, x_0, u(t)) = \mathrm{Re}\{\tilde{\varphi}(t, x_0, \tilde{u}(t))\}$$

$$\tilde{u}(t) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} -i e^{2i\omega t} \\ e^{2i\omega t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

b) $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$

$$\tilde{\varphi}(t, x_0, \tilde{u}(t)) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} \tilde{u}(s)\, ds$$

$$= e^{At} x_0 + e^{At} \underbrace{\int_0^t e^{-As} \tilde{u}(s)\, ds}$$

$$e^{-As} \tilde{u}(s) = T e^{-Js} T^{-1} \cdot e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} -i e^{2i\omega s} \\ e^{2i\omega s} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{T e^{-\gamma s} \begin{pmatrix} e^{\gamma s + i\omega s} & 0 \\ 0 & e^{\gamma s - i\omega s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2i\omega s} \end{pmatrix}} = T \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\omega s} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

b) $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$

$$\tilde{\varphi}(t, x_0, \tilde{u}(t)) = \underbrace{e^{At} x_0}_{\text{aus a)}} + T \begin{pmatrix} e^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} \cancel{T^{-1}} \cdot \cancel{T} \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\omega s} \end{pmatrix} ds$$

$$= e^{At} x_0 + T \begin{pmatrix} e^{-\gamma t - i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t + i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega t} - 1\right) \end{pmatrix}$$

$$= e^{At} x_0 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega}\left(e^{-\gamma t + 2i\omega t} - e^{-\gamma t + i\omega t}\right) \\ \frac{1}{i\omega}\left(e^{-\gamma t + 2i\omega t} - e^{-\gamma t + i\omega t}\right) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnung von Zustandssignalen

Berechnen Sie das allgemeine Zustandssignal φ für den Fall

$$\text{b) } u(t) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma t} \cdot \sin(2\omega t) \\ e^{-\gamma t} \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t, x_0, u) = \mathrm{Re}\{\tilde{\varphi}(t, x_0, \tilde{u})\} = e^{At} x_0 + \frac{e^{-\gamma t}}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \cos(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) - \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= e^{-\gamma t} \left[\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} x_0 + \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \cos(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) - \sin(\omega t) \end{pmatrix} \right]$$