

## ➤ Steuer- und Erreichbarkeit zeitdiskreter Systeme

- Bei zeitdiskreten Systemen sind Steuer- und Erreichbarkeit keine äquivalente Eigenschaften.
- Die Erfüllung des Kalmankriteriums ist notwendig **und** hinreichend für die Erreichbarkeit.
- Jedes vollständig erreichbare zeitdiskrete System  $(A,b)$  ist **auch** vollständig steuerbar.
- Die Umkehrung gilt nur, wenn die Systemmatrix  $A$  **regulär** ist (keine Eigenwerte bei 0 hat).
- Die Erfüllung des Kalmankriteriums ist zwar hinreichend **aber nicht** notwendig für die Steuerbarkeit.

- **Beobachtbarkeit und Rekonstruierbarkeit zeitdiskreter Systeme**
- Bei zeitdiskreten Systemen sind Beobachtbarkeit und Rekonstruierbarkeit keine äquivalente Eigenschaften.
  - Die Erfüllung des Kalmankriteriums ist notwendig **und** hinreichend für die Beobachtbarkeit.
  - Jedes vollständig beobachtbare zeitdiskrete System  $(A,c)$  ist **auch** vollständig rekonstruierbar.
  - Die Umkehrung gilt nur, wenn die Systemmatrix  $A$  **regulär** ist (keine Eigenwerte bei 0 hat).
  - Die Erfüllung des Kalmankriteriums ist zwar hinreichend **aber nicht** notwendig für die Rekonstruierbarkeit.

- **Steuer- und Beobachtbarkeit des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems**
- **Durch Abtastung kann die vollständige Steuer- und Beobachtbarkeit eines kontinuierlichen Systems verloren gehen.**
  - **Sei das kontinuierliche System vollständig steuer- und beobachtbar. Dann ist das zugehörige Abtastsystem genau dann vollständig steuer- und beobachtbar, wenn für zwei verschiedene Eigenwerte  $\lambda_i$  und  $\lambda_j$  ( $\lambda_i \neq \lambda_j$ ) der Matrix A die folgende Bedingung erfüllt ist:**

$$e^{\lambda_i T} \neq e^{\lambda_j T}$$



Mit dem Entwurf auf endliche Einstellzeit besteht bei zeitdiskreten Systemen eine Möglichkeit, die keine Entsprechung bei zeitkontinuierlichen Systemen hat.

**Gesucht ist eine Zustandsrückführung**

$$u(k) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}(k) \quad ,$$

**die das System**

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \quad , \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$$

**in den Endzustand**

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(n) = \mathbf{0}$$

**überführt.**

**$n = \text{Anzahl der Zustandsgrößen}$**



## Satz:

Ein vollständig erreichbares zeitdiskretes System  $(A, b)$  wird durch eine Zustandsrückführung in endlicher Zeit - und zwar **spätestens** nach  $n$  Zeitschritten - von jedem beliebigen Anfangszustand in den Nullzustand überführt, wenn die Rückführung so gewählt wird, daß das rückgeführte System den  **$n$ -fachen** Eigenwert

$$\lambda = 0$$

hat.

Die Systemmatrix  $A - bk^T$  des rückgeführten Systems ist eine nilpotente Matrix ( es gibt ein  $k$  mit  $A^k = 0$ )

## Regelgesetz:

$$u(k) = - \underbrace{[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b]^{-1} A^n}_{\text{Letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix}} x(k)$$

**Letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix**



## Quasikontinuierliche digitale Regelung

### Voraussetzung:

Die Abtastzeit ist wesentlich kleiner als die maßgebenden Zeitkonstanten des Regelkreises:

- **Unbehauen:** Abtastzeit kleiner als  $1/10$  der dominierenden Zeitkonstante des Systems.
- **Braun:** Abtastrate = 20fache der Bandbreite des geschlossenen Regelkreises.
- **Lunze:** Abtastrate 6 – 20fache der größten im Regelkreis auftretenden Frequenz (Führungssignal, Störungen, Bandbreite der Regelstrecke).

## Quasikontinuierliche digitale Regelung

Ist die Bedingung an die Abtastzeit erfüllt, so kann der Regler als kontinuierlicher Regler entworfen und dann als zeitdiskreter Regler realisiert werden.

### Vorteile:

- Der Regler kann mit Hilfe bekannter Methoden für kontinuierliche Systeme entworfen werden.
- Man erfährt, welche Regelgüte prinzipiell mit einer kontinuierlichen Regelung erreicht werden kann.

### Nachteil:

- Der Regelkreis wird weniger gedämpft sein, da der digitale Regler eine zusätzliche Phasenverschiebung einbringt.



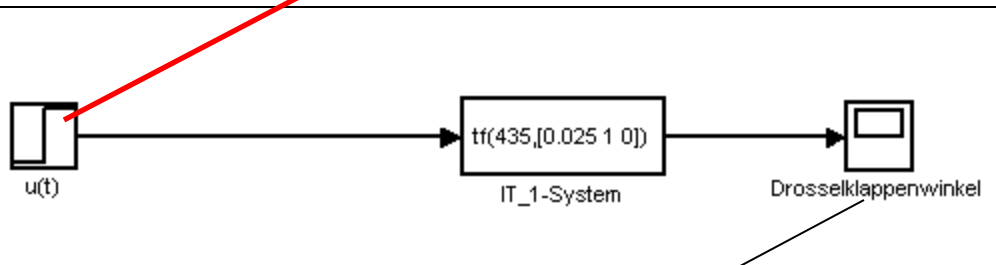
## Simulation mit Simulink

Fall:  $u_2(t) = 3,6$  (Volt)



IT<sub>1</sub>-System:

$$G(s) = \frac{K_I}{s} \frac{1}{1 + T_1 s}$$



mit

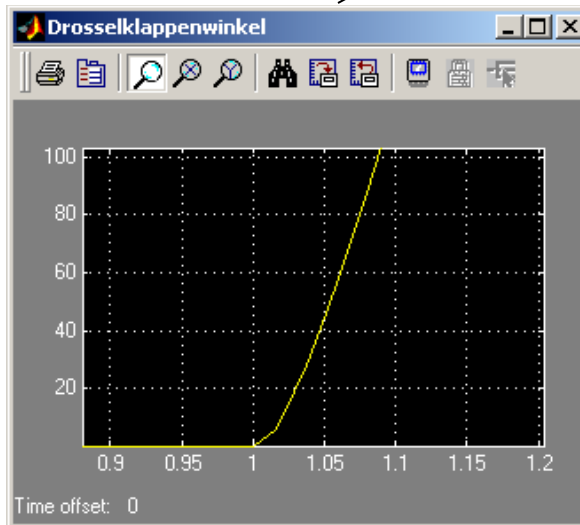
$$T_1 = 0,025 \text{ s}$$

$$K_I = 435 \text{ Grad/s}$$



$$G(s) = \frac{435}{s} \frac{1}{1 + 0,025s}$$

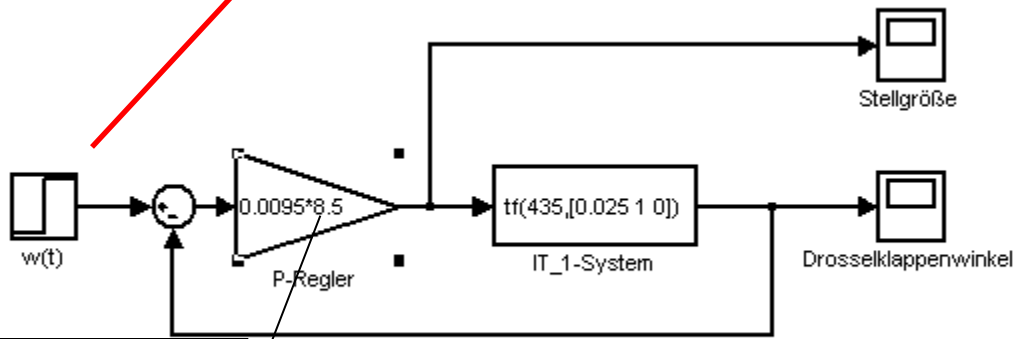
$$= \frac{435}{0,025s^2 + s}$$



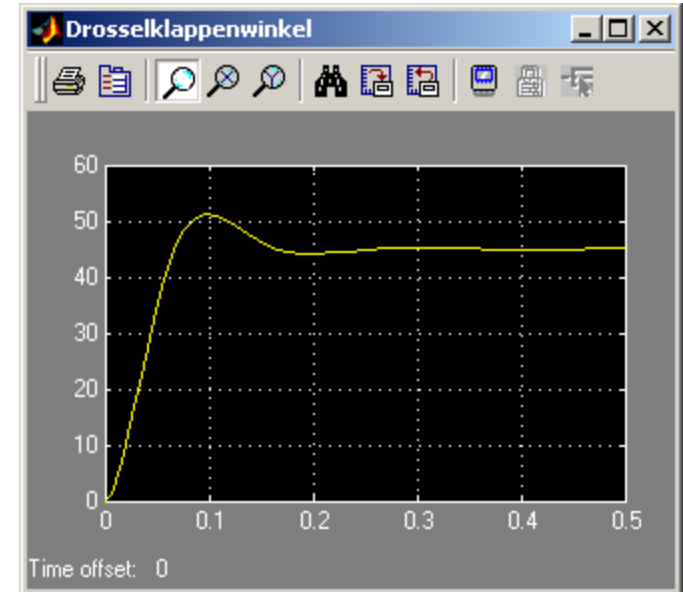
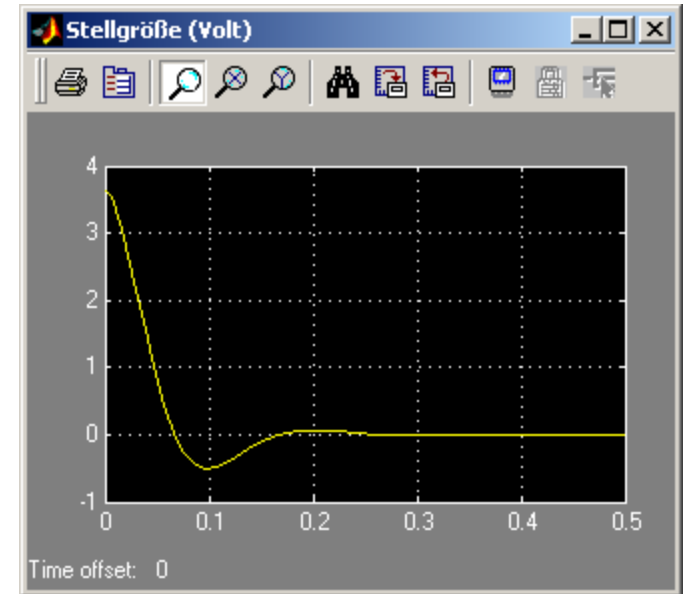


## Kontinuierliche Regelung

Fall:  $w(t) = 45^\circ$  mit P-Regler



Umrechnung  
in Volt



Digitale Regelung



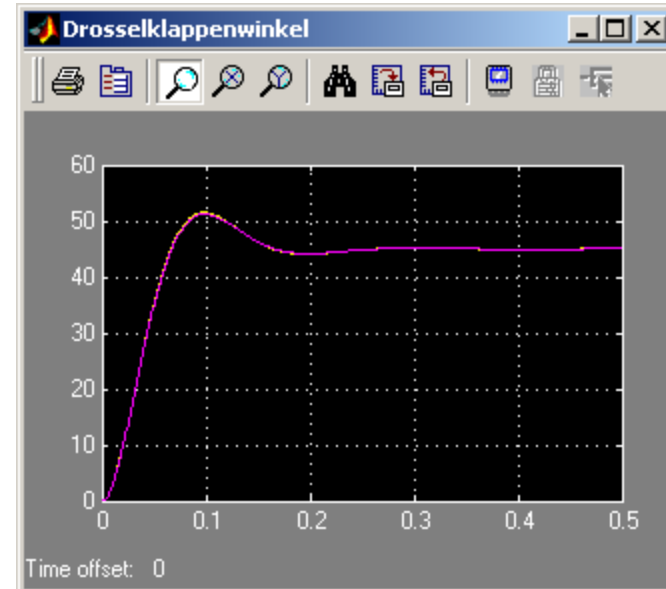
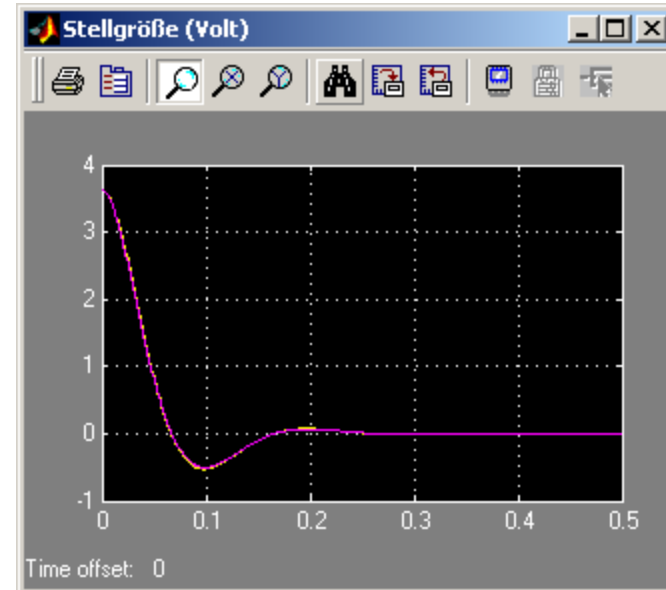
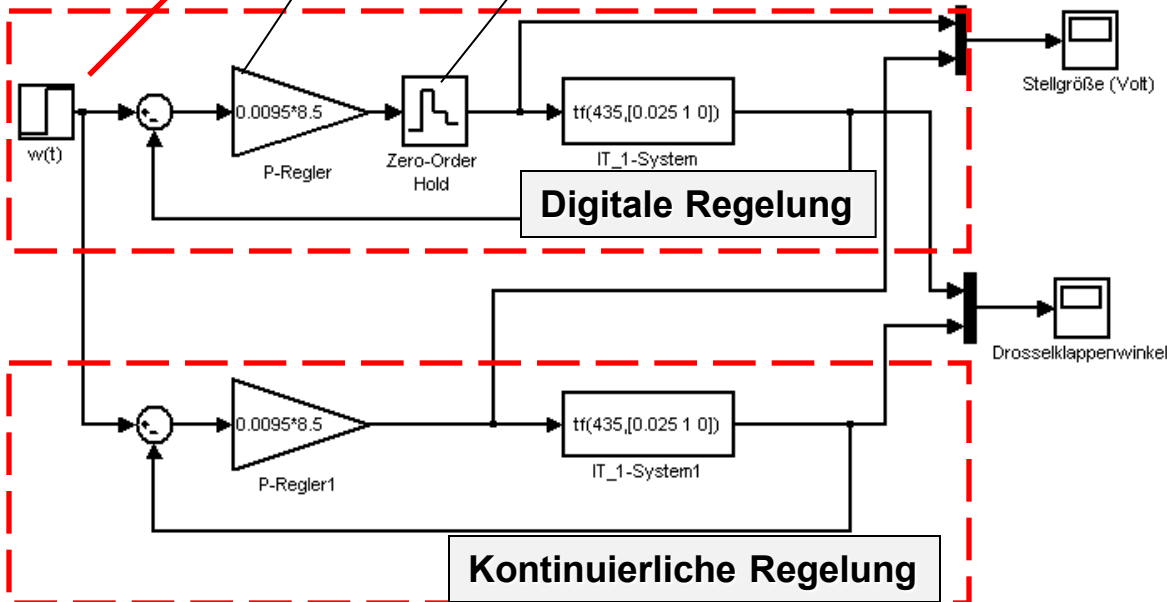
## Digitale Regelung

Fall:  $w(t) = 45^\circ$  mit P-Regler

$$\frac{T_1}{T} = 25$$

Keine Verzögerung  
im Regler

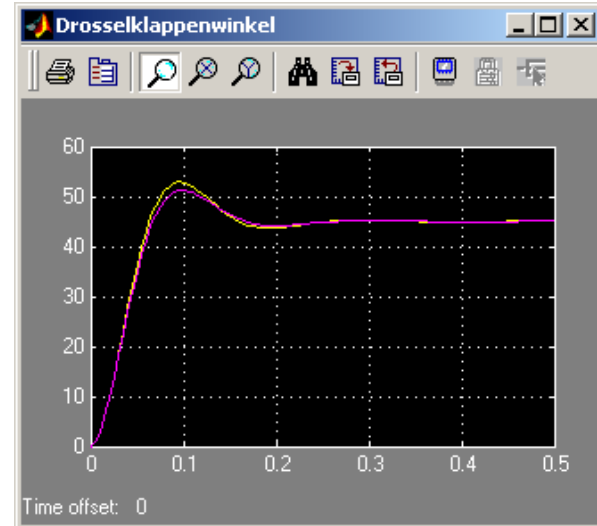
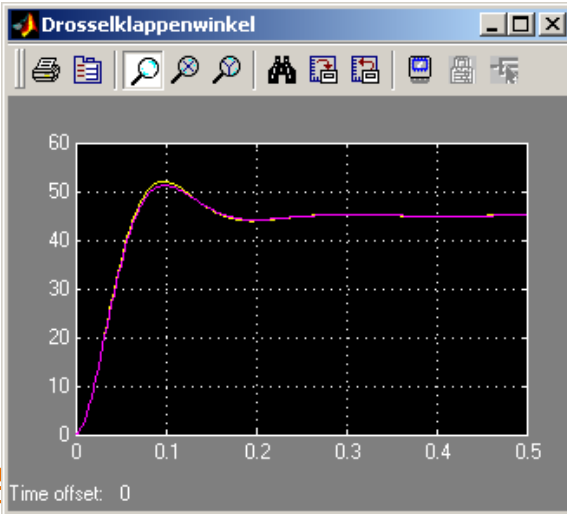
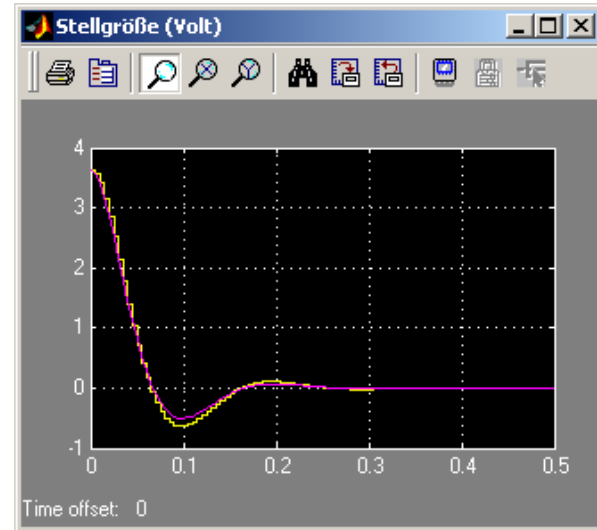
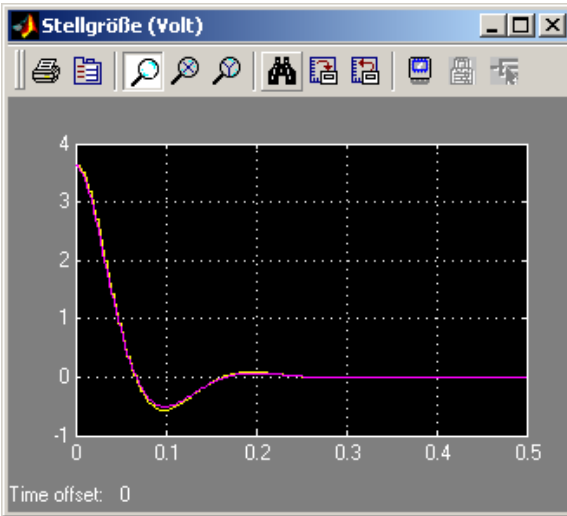
Halteglied der  
Ordnung Null ( $T=0,001$ )



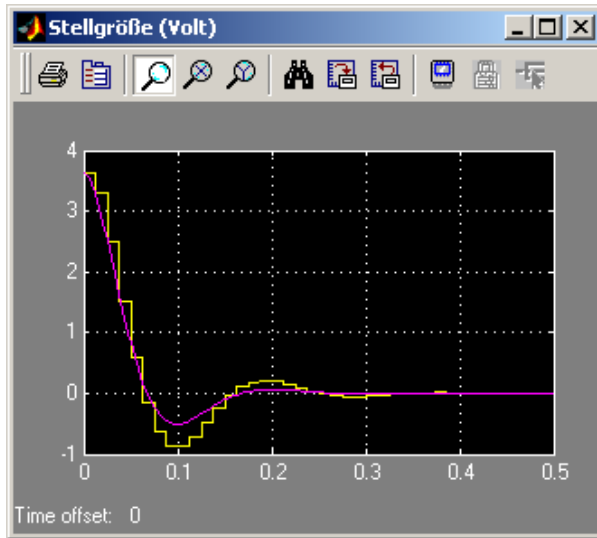
Abtastzeit  $T = 0,0025$

Abtastzeit  $T = 0,005$

$$\frac{T_1}{T} = 10$$

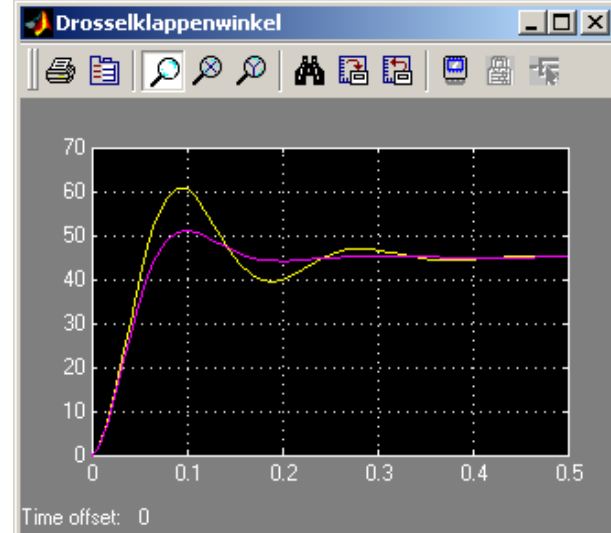
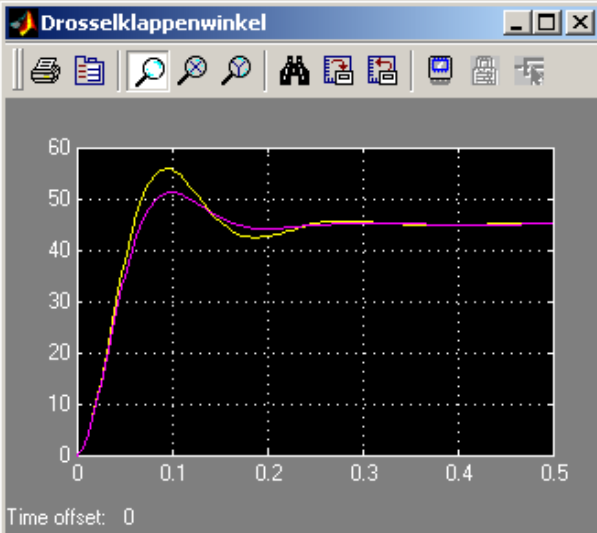
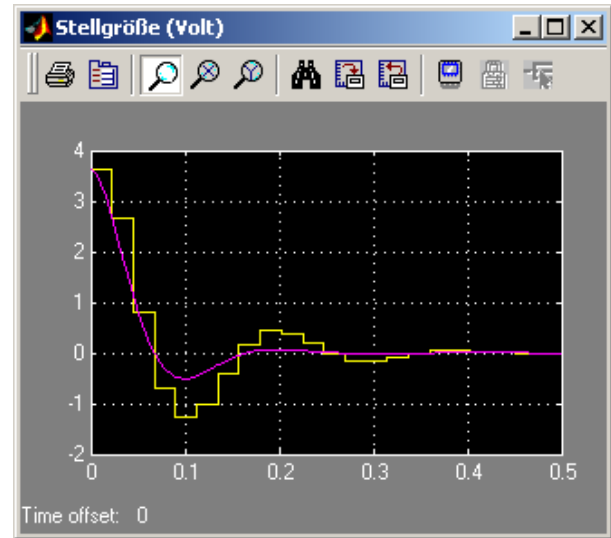


Abtastzeit  $T = 0,0125$

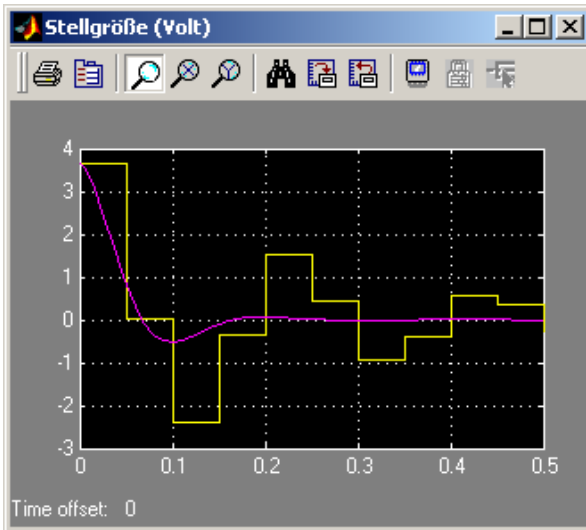


$$\frac{T_1}{T} = 2$$

Abtastzeit  $T = 0,025$

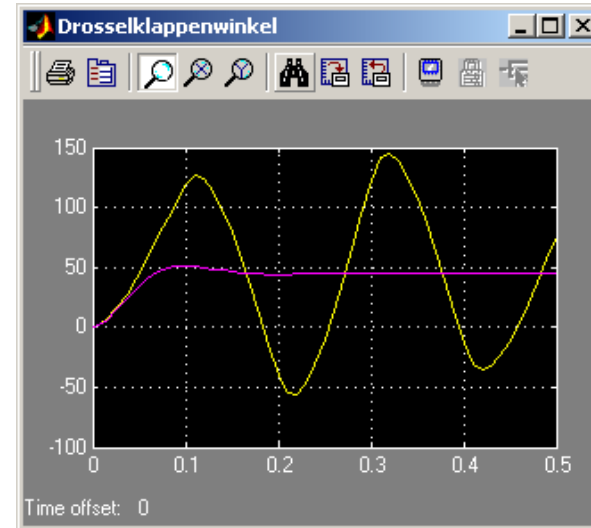
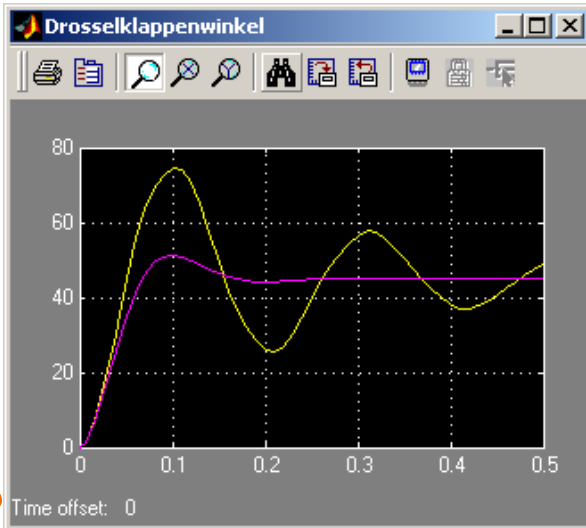
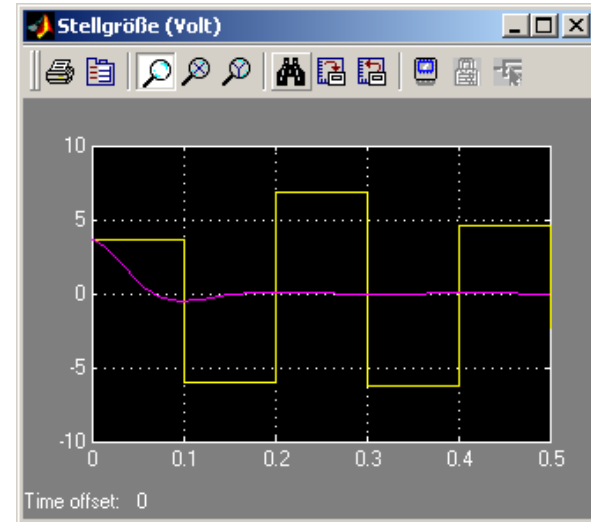


Abtastzeit  $T = 0,05$



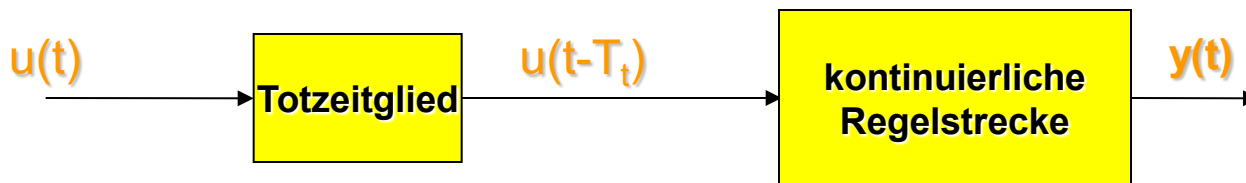
$$\frac{T_1}{T} = 0,5$$

Abtastzeit  $T = 0,1$



## Einfluß von Abtaster und Halteglied auf die Stabilität des Regelkreises

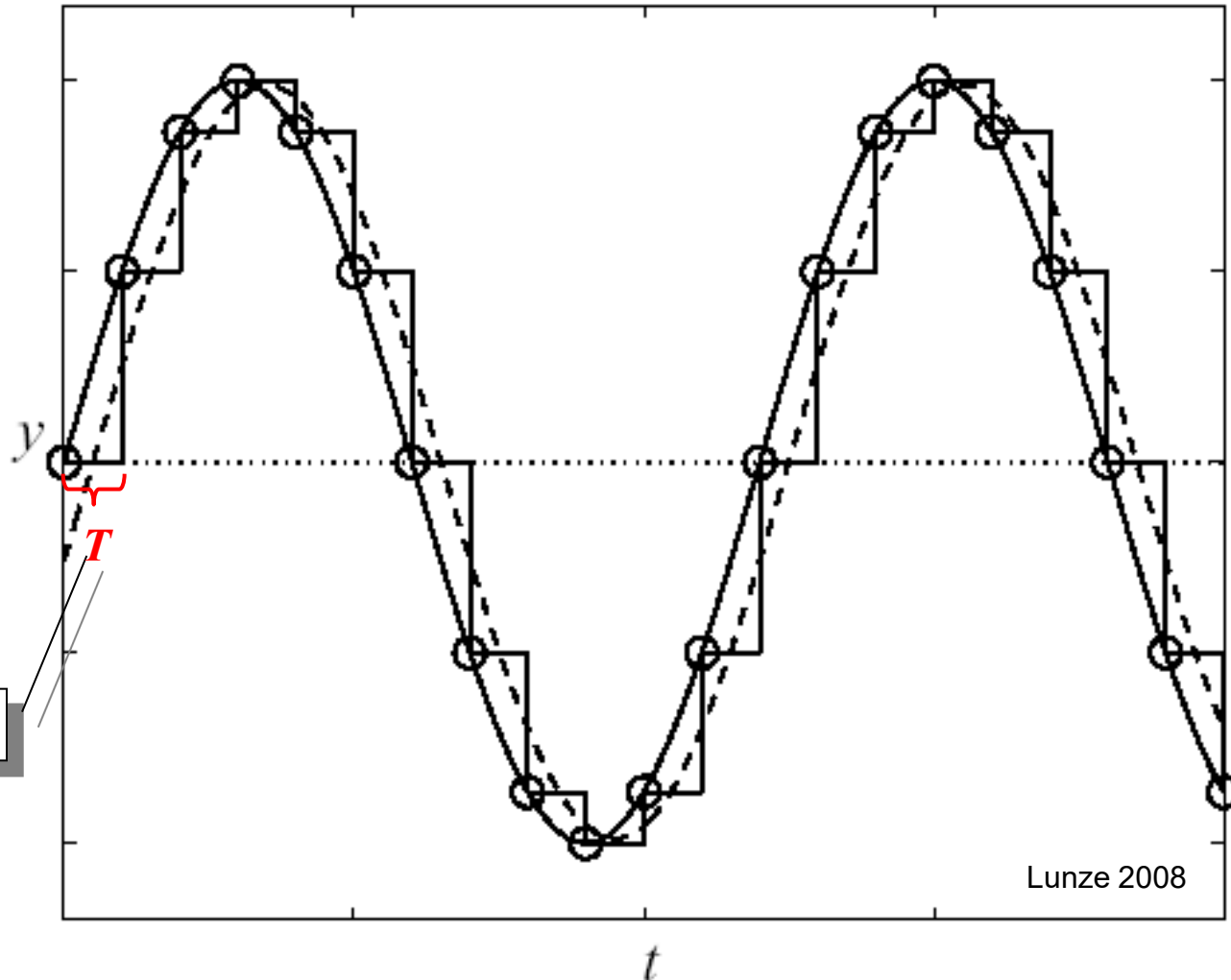
Approximation von Abtaster und Halteglied durch kontinuierliches Totzeitglied:



Für kleine Abtastzeiten  $T$  kann man  $T_t = T/2$  setzen.

Betrachtung des Einflusses des Totzeitgliedes auf den Phasenrand.

## Wirkung des Haltegliedes 0-ter Ordnung bei einem sinusförmigen Eingangssignal



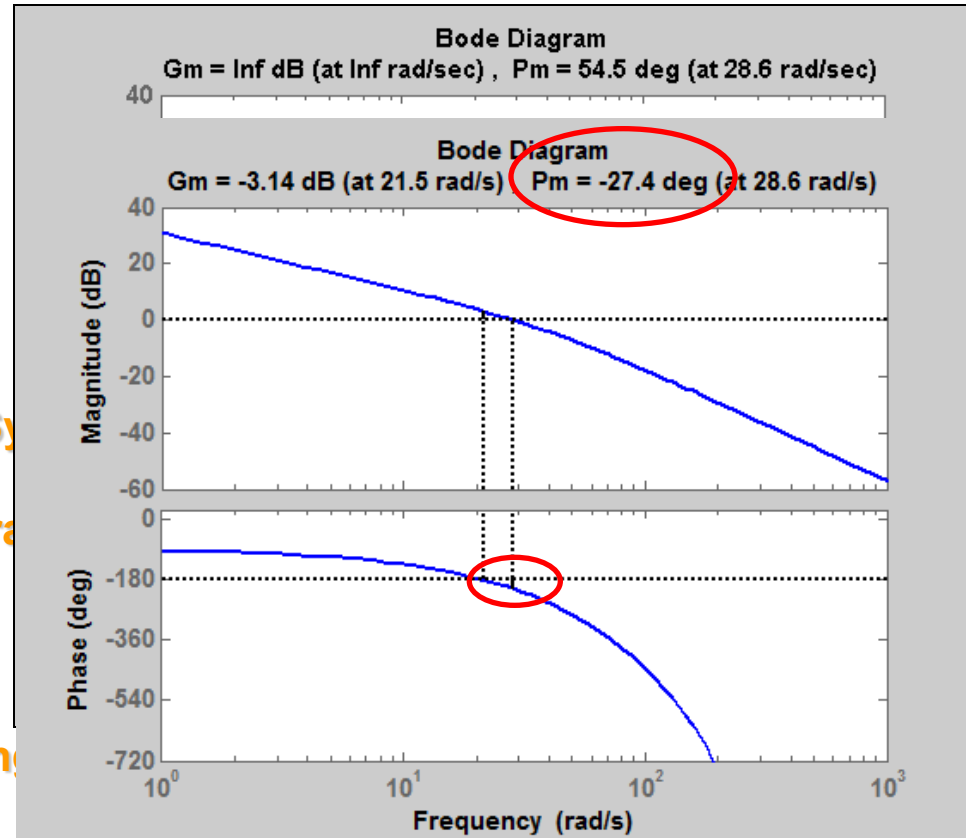
**Abtastzeit**

Lunze 2008



```
%
% Approximation des Einflusses von Abtaster und Halteglied durch Totzeitglied
```

```
%
s = tf('s');
%
K_I = 435;
T_1 = 0.025;
G_s = K_I/s*(1/(1+T_1*s)); %Strecke
%
K_R = 0.0095 * 8.5; % P-Regler
G_0 = K_R * G_s % Üfkt. des offenen Sy
figure(1)
margin(G_0) % Amplituden- und Phasenra
%
T = 0.1; % Abtastzeit
T_t = T/2; % Totzeit
set(G_s,'Inputdelay',T_t) % Totzeit am Ein
%
figure(2)
margin(G_0) % Amplituden- und Phasenrand von G_0(s) mit Totzeit
```

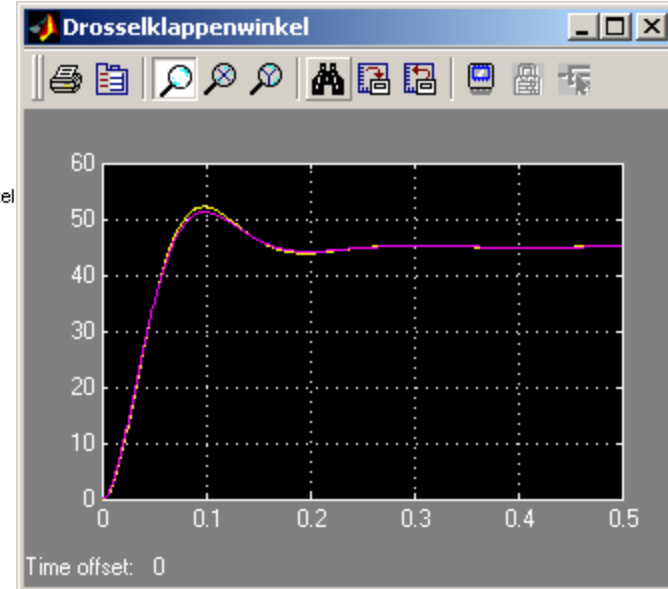
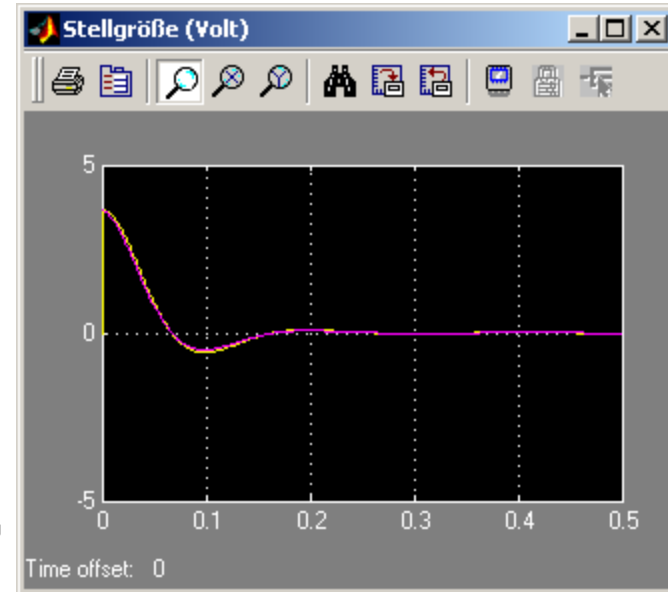
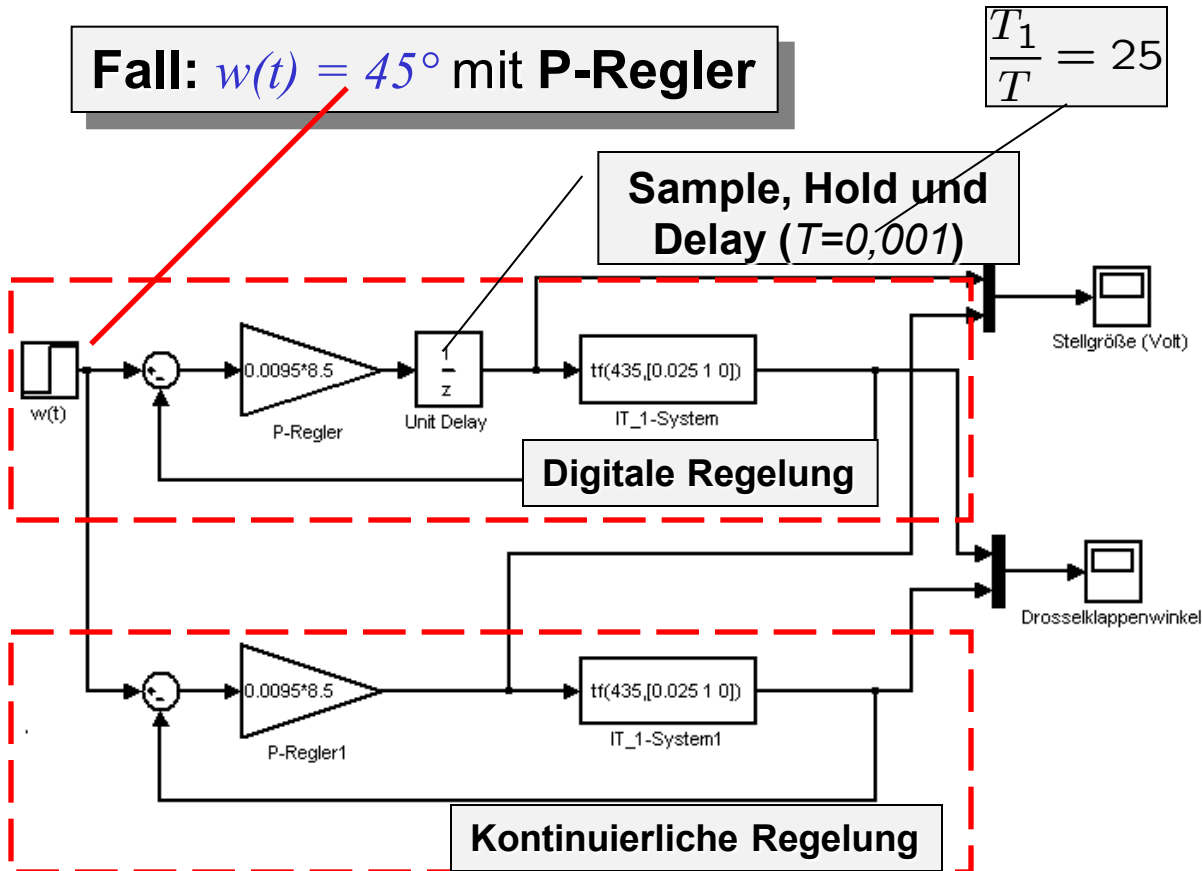




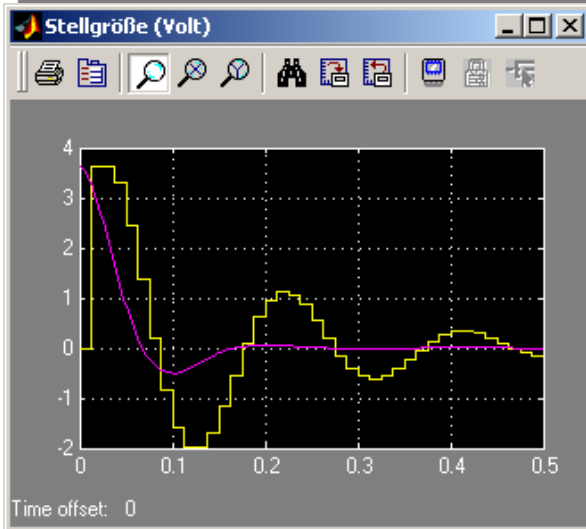
## Digitale Regelung

Fall:  $w(t) = 45^\circ$  mit P-Regler

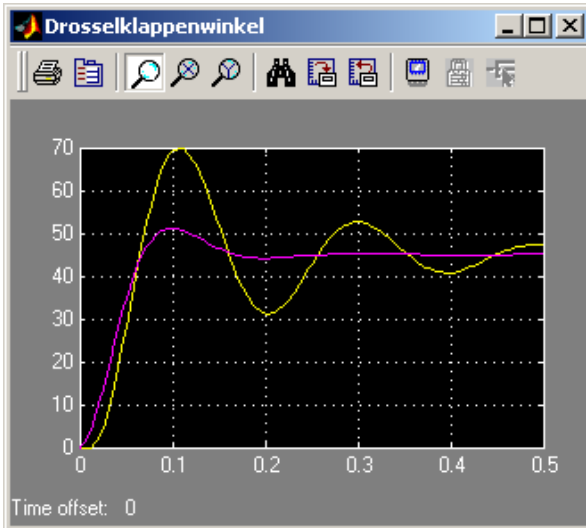
$$\frac{T_1}{T} = 25$$



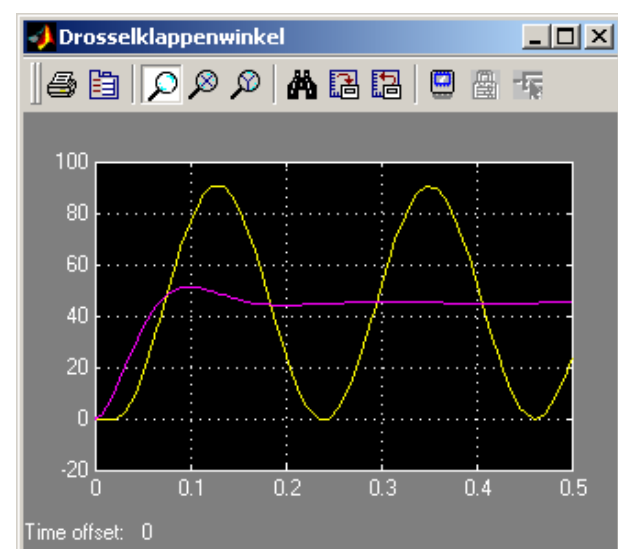
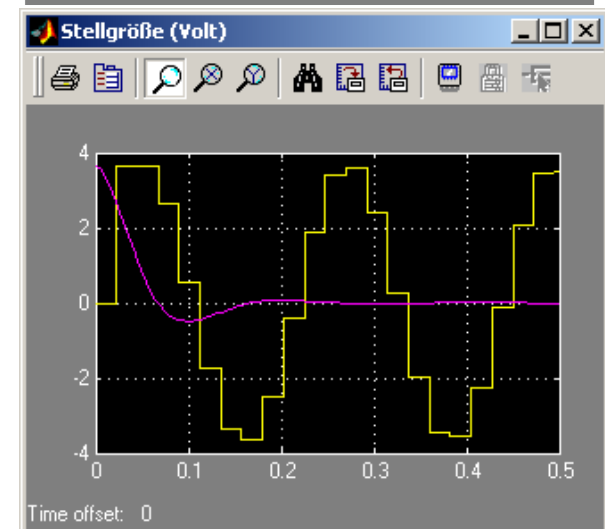
Abtastzeit  $T = 0,0125$



$$\frac{T_1}{T} = 2$$



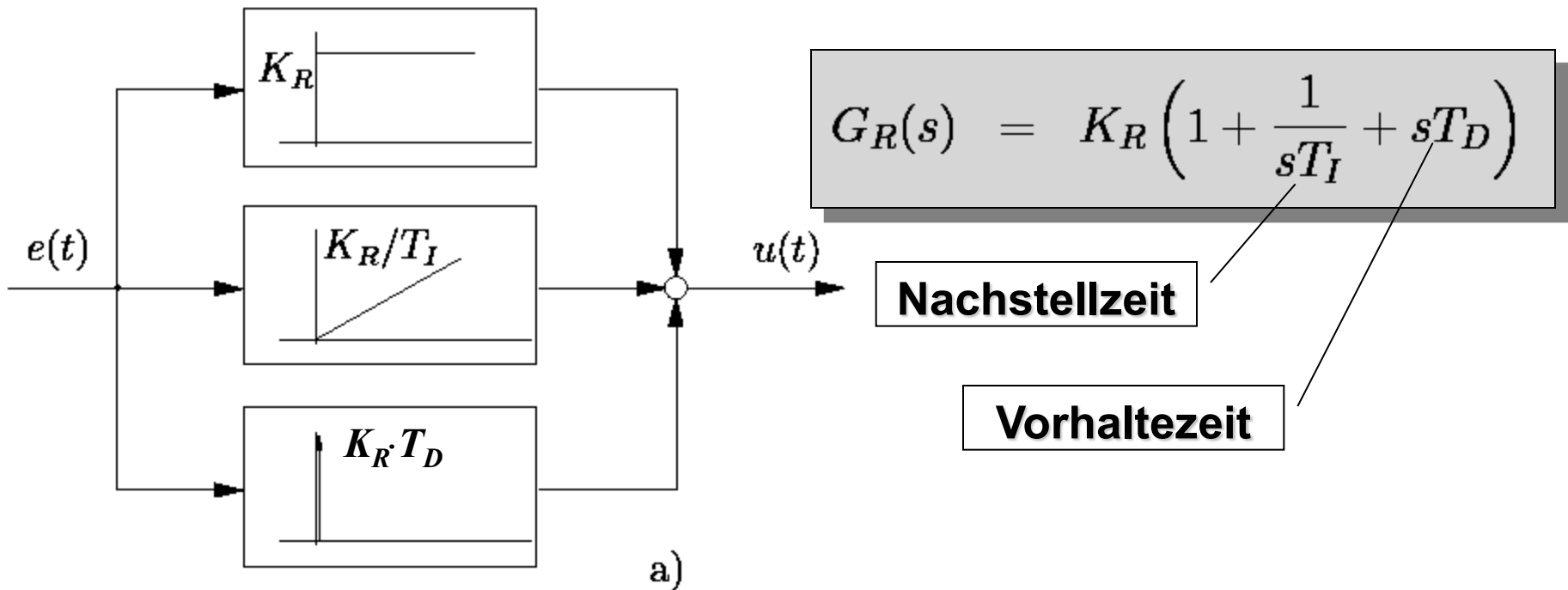
Abtastzeit  $T = 0,0225$



## Zusammenfassung:

- **Der zeitdiskrete Regelkreis kann schwächer gedämpft sein als der kontinuierliche Regelkreis.**
- **Der zeitdiskrete Regelkreis kann langsamer sein als der kontinuierliche Regelkreis.**
- **Der zeitdiskrete Regelkreis wird für zu große Abtastzeiten immer instabil.**
- **Für die Stabilität des zeitdiskreten Regelkreises ist es **notwendig**, aber nicht hinreichend, dass der kontinuierliche Regelkreis stabil ist.**

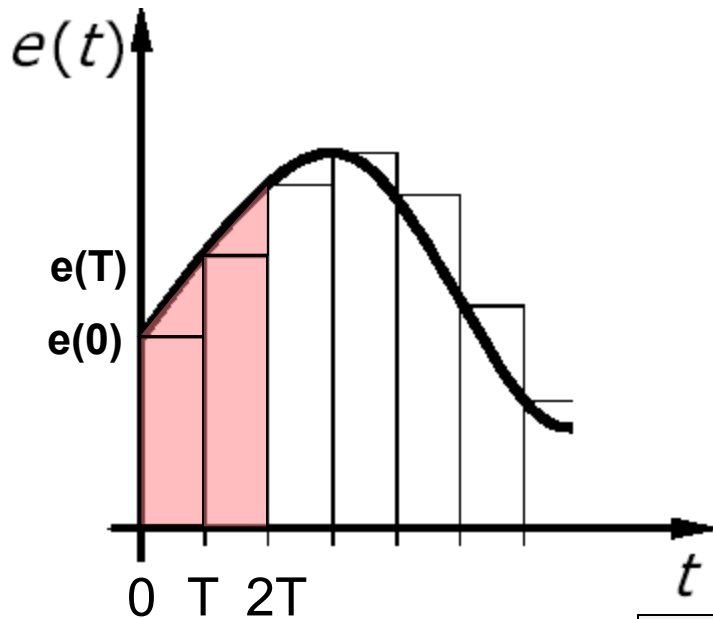
## Blockschaltbild des kontinuierlichen PID-Reglers



**P-Glied:**  $u(t) = K_r \cdot e(t)$   $\Rightarrow$   $u(k) = K_r \cdot e(k)$

**I-Glied:** 
$$u(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

## Approximation der Integration mit Hilfe der Trapezregel



$$u(0) = 0$$

$$u(T) = \frac{1}{T_I} (e(0)T + \frac{e(T) - e(0)}{2} T)$$

$$= \frac{T}{T_I} \left( \frac{e(0)}{2} + \frac{e(T)}{2} \right)$$

$$u(2T) = u(T) + \frac{T}{T_I} \left( \frac{e(T)}{2} + \frac{e(2T)}{2} \right)$$



$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2T_I} (e(k-1) + e(k))$$



## Bestimmung der z-Übertragungsfunktion aus der Differenzgleichung des I-Gliedes

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2T_I}(e(k-1) + e(k))$$

Anwendung des Rechtsverschiebungssatzes

$$f(k-i) \quad \circ \text{---} \bullet \quad z^{-i}F(z)$$

$$U(z) - \frac{1}{z}U(z) = \frac{T}{2T_I} \left[ \frac{1}{z}E(z) + E(z) \right]$$

$$U(z) \frac{z-1}{z} = \frac{T}{2T_I} E(z) \frac{z+1}{z}$$

z-Übertragungsfunktion des I-Gliedes für Trapez-Approximation

$$G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2T_I} \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

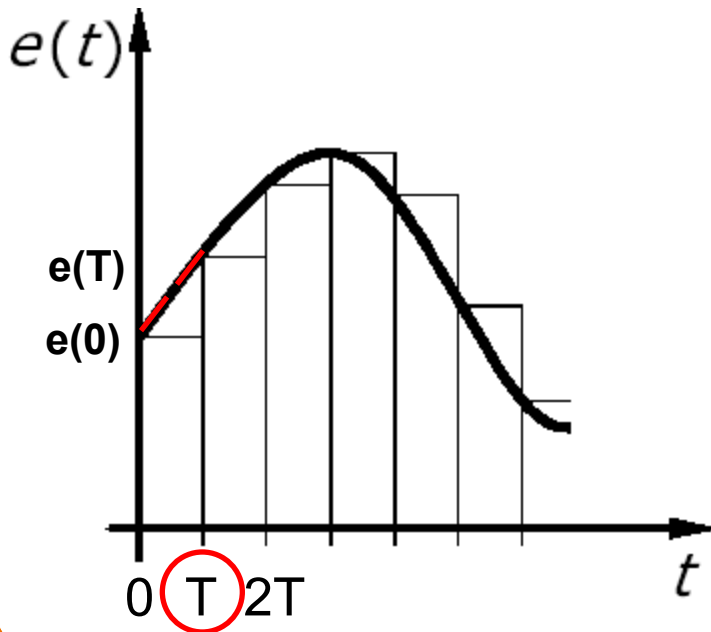


**D-Glied:**  $u(t) = T_D \dot{e}(t)$

**Approximation des Differentialquotienten**

$$\dot{e}(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

**durch Differenzenquotienten**



$$\Delta e(k) = \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

$$u(k) = T_D \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

$$U(z) = \frac{T_D}{T} (1 - z^{-1}) E(z)$$

$$G_D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T_D}{T} (1 - z^{-1})$$

$$G_D(z) = \frac{T_D}{T} \cdot \frac{z-1}{z}$$



## Vergleich kontinuierliches und diskretes D-Glied

### Kontinuierliche Systeme

$$G_D(s) = T_D s$$

- Phasenhebung von  $90^\circ$ .
- Wirkt stabilisierend.
- Kann technisch nicht realisiert werden.

### Zeitdiskrete Systeme

$$G_D(z) = \frac{T_D}{T} \cdot \frac{z - 1}{z}$$

- Parameter ist von der Abtastzeit abhängig.
- Pol im Ursprung.  $\Rightarrow$
- Phasennacheilung.
- Kann technisch realisiert werden.



## Digitaler PID-Regler

$$G_{PID}(z) = K_R + \frac{K_R T}{2T_I} \cdot \frac{z+1}{z-1} + \frac{K_R T_D}{T} \cdot \frac{z-1}{z}$$



$$G_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{d_2 z^2 + d_1 z + d_0}{z(z-1)}$$

mit

$$d_2 = K_R \left( 1 + \frac{T}{2T_I} + \frac{T_D}{T} \right)$$

$$d_1 = K_R \left( -1 + \frac{T}{2T_I} - \frac{2T_D}{T} \right)$$

$$d_0 = \frac{K_R T_D}{T}$$

## Realisierung des digitalen PID-Reglers

$$z(z - 1)U(z) = (d_2z^2 + d_1z + d_0)E(z)$$

$$\cdot \frac{1}{z^2}$$



$$\left(1 - \frac{1}{z}\right)U(z) = \left(d_2 + d_1\frac{1}{z} + d_0\frac{1}{z^2}\right)E(z)$$

### Anwendung des Rechtsverschiebungssatzes

$$f(k - i) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad z^{-i}F(z)$$

$$u(k) = u(k - 1) + d_2e(k) + d_1e(k - 1) + d_0e(k - 2)$$