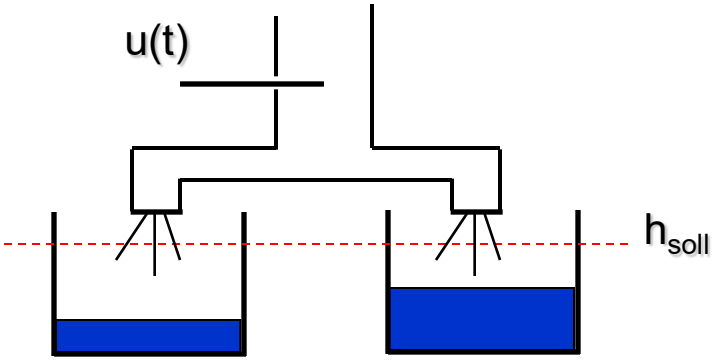
Heißluftballon

Lediglich die **Höhe** eines Heißluftballons kann durch den Brenner gezielt beeinflusst werden.

Parallelschaltung von Systemen mit gleichen dynamischen Eigenschaften



Die Wasserstände in den beiden Behältern können nicht **unabhängig** voneinander eingestellt werden.

Steuerbarkeit und Erreichbarkeit

Definition 3.4 *(Zustandssteuerbarkeit)*

Ein dynamisches System $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ heißt *vollständig zustandssteuerbar (z–steuerbar)*, wenn der Zustandsvektor $\boldsymbol{x}(t)$ durch eine geeignete Steuerfunktion $u(t)$ in einer endlichen Zeitspanne $[t_0, t_e]$ von jedem beliebigen Anfangszustand $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ in den Nullzustand $\boldsymbol{x}(t_e) = \boldsymbol{0}$ überführt werden kann.

Definition 3.5 *(Zustandserreichbarkeit)*

Ein dynamisches System $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ heißt *vollständig erreichbar*, wenn der Zustandsvektor $\boldsymbol{x}(t)$ durch eine geeignete Steuerfunktion $u(t)$ in einer endlichen Zeitspanne $[t_0, t_e]$ aus dem Nullzustand $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$ in jeden gewünschten Endzustand $\boldsymbol{x}(t_e)$ überführt werden kann.

Die Erreichbarkeit stellt im Vergleich zur Steuerbarkeit eigentlich höhere Anforderungen an die Eigenschaften eines dynamischen Systems.

Bei linearen, zeitinvarianten Systemen muss nicht zwischen Steuer- und Erreichbarkeit unterschieden werden.

Zustandsrückführung

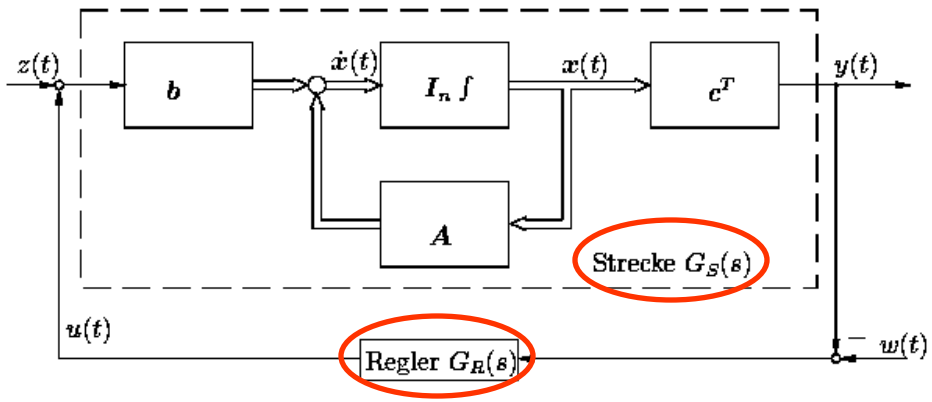
Bei der Art der Rückkopplung kann zwischen

a) Ausgangsrückführung

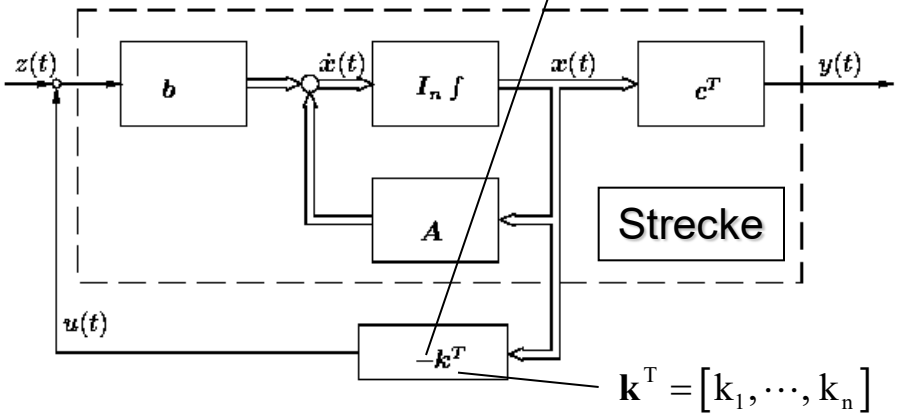
b) Zustandsrückführung

unterschieden werden.

- Rückführung aller Zustandsgrößen
- Statischer Regler: $u(t) = -\mathbf{k}^T\mathbf{x}(t)$
- Beliebige Platzierung aller Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises, wenn (**A**,**b**) vollständig steuerbar ist.



Ausgangsrückführung



Zustandsrückführung

Lösung der Zustandsgleichung (3)

Kontinuierliche Systeme

Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

Systemausgang

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) + du(t)$$

$$= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau + du(t)$$

Zeitdiskrete Systeme

Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1-i}\boldsymbol{b}u(i)$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(k-1-i)\boldsymbol{b}u(i)$$

Systemausgang

$$y(k) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(k) + du(k)$$

$$= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\Phi}(k-1-i)\boldsymbol{b}u(i) + du(k)$$

Steuerbarkeit zeitdiskreter Systeme (2)

Steuer- und Erreichbarkeit kontinuierlicher Systeme

Wenn ein kontinuierliches System vollständig steuerbar ist, dann existiert für jeden Anfangswert $\mathbf{x}_0$ eine geeignete Eingangsgröße $u(t), 0 \leq t \leq t_e$, so daß

$$\mathbf{0} = \mathbf{\Phi}(t_e)\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_e} \mathbf{\Phi}(t_e - \tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

gilt.

strebt für stabile Systeme nur asymptotisch gegen Null.

Für ein vollständig erreichbares System existiert für jedes beliebiges $\mathbf{x}(t_e)$ eine Eingangsgröße $u(t), 0 \leq t \leq t_e$, die die Gleichung

$$\mathbf{x}(t_e) = \int_0^{t_e} \mathbf{\Phi}(t_e - \tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

erfüllt.

Eigenschaften der Transitionsmatrix (2)

$$\mathbf{\Phi}(t)^{-1} = (e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{\mathbf{A}(-t)} = \mathbf{\Phi}(-t)$$

Die Inverse der Transitionsmatrix kann direkt angegeben werden:

$$(3) \quad \mathbf{\Phi}(t)^{-1} = \mathbf{\Phi}(-t)\ , \qquad \mathbf{\Phi}(t)^{k} = \mathbf{\Phi}(kt)$$

Gliedweise Differentiation der Reihe

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^i t^i}{i!} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!}t^3 + \ldots$$

liefert:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0} + \mathbf{A} + \frac{\cancel{2}\mathbf{A}^2 t}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{3}\mathbf{A}^3 t^2}{\cancel{3}\cdot 2!} + \ldots$$

$$(4) \quad \dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \boldsymbol{A}\mathbf{\Phi}(t)\ .$$

Lösung der Zustandsgleichung

Kontinuierliche Systeme

Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0$$

mit der Matrixexponentialfkt.

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\boldsymbol{A}^2}{3!}t^3 + \ldots$$

Transitionsmatrix

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$$

Zeitdiskrete Systeme

Lösung der homogenen Differenzengleichung

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)\ , \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0)$$
$$, \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

$$k=0: \quad \boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)$$
$$k=1: \quad \boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(1)$$
$$= \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(0)$$

Allgemein: $\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0)$

Transitionsmatrix: $\boldsymbol{\Phi}(k) = \boldsymbol{A}^k$

Steuerbarkeitskriterien

Satz 3.2 *(Steuerbarkeitskriterien)*

Ein zeitinvariantes System (3.1) der Ordnung n ist

a1) (Kalman-Kriterium)

dann und nur dann vollständig z–steuerbar, wenn für die $(n \times n)$ Steuerbarkeitsmatrix $\boldsymbol{Q}_S$ gilt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_S = \text{Rang}\left[\mathbf{b}\ \mathbf{Ab}\ \mathbf{A}^2\mathbf{b}\ \ldots.\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\right] = n \tag{3.37}$$

Der Rang der Steuerbarkeitsmatrix gibt die Anzahl der steuerbaren Zustandsgrößen an.

a2) (Hautus-Kriterium)

Überprüfung der einzelnen Eigenwerte auf Steuerb

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_S^* = \text{Rang}\left[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\ \mathbf{b}\right]_{\lambda=\lambda_i} = n \tag{3.38}$$

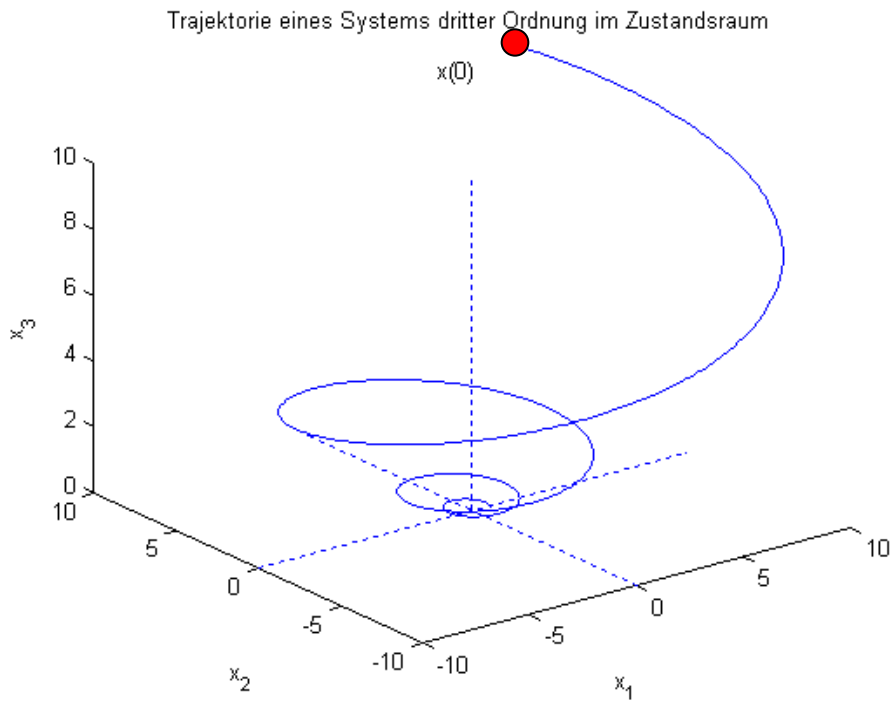
mit $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$ den Eigenwerten von $\boldsymbol{A}$.

Man sagt dann auch, dass der Eigenwert λ_i nicht steuerbar ist !!

Ist die Bedingung nicht erfüllt, so kann die zugehörige Eigenbewegung nicht beeinflusst werden.

Definition 3.7 *Beobachtbarkeit*

Das dynamische System (3.1) heißt *vollständig beobachtbar* im Intervall $[t_0, t_e]$, wenn für gegebene t_0 und t_e jeder Systemzustand $\boldsymbol{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ aus der Kenntnis der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ in $[t_0, t_e]$ ermittelt werden kann. □



Beobachtbarkeitskriterien

Satz 3.4 (Beobachtbarkeitskriterien)

Ein zeitinvariantes System (3.1) der Ordnung n ist

a1) (Kalman Kriterium)
dann und nur dann vollständig beobachtbar, wenn gilt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_B = \text{Rang}\left[\mathbf{c} \;\; \mathbf{A}^T\mathbf{c} \;\; .... \;\; (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{c}\right] = n \qquad (3.42)$$

Der Rang der Beobachtbar-keitsmatrix gibt die Anzahl der beobachtbaren Zustandsgrößen an.

a2) (Hautus-Kriterium)
Überprüfung der einzelnen Eigenwerte auf Beobac

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_B^* = \text{Rang}\left[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^T \;\; \mathbf{c}\right]_{\lambda=\lambda_i} = n \qquad (3.43)$$

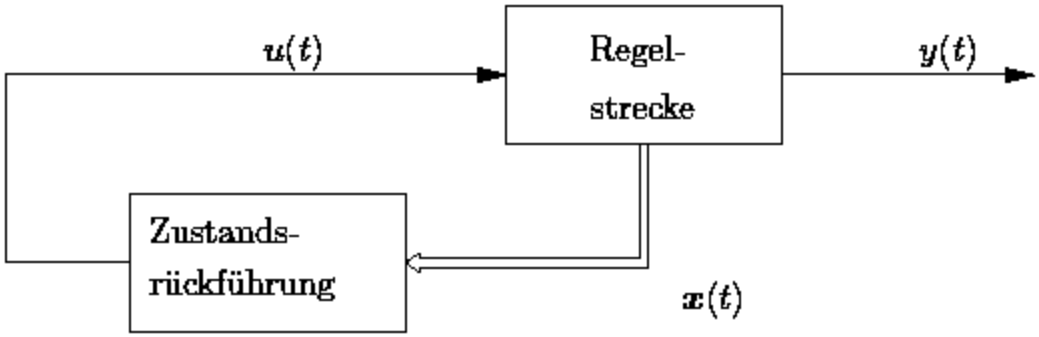
mit $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$ den Eigenwerten von $\boldsymbol{A}$.

Man sagt dann auch, dass der Eigenwert λ_i nicht beobachtbar ist !

Ist die Bedingung für einen Eigenwert nicht erfüllt, so kann die zugehörige Eigenbewe-gung nicht beobachtet werden.

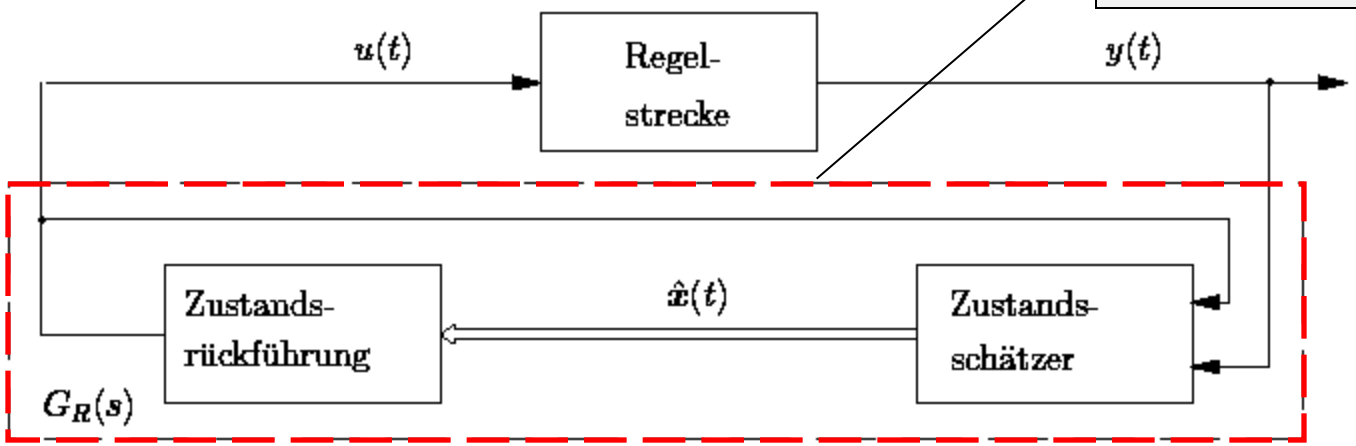
Beobachterentwurf (3)

Strecke mit Zustandsrückführung



Zustandsrückführung mit Beobachter

Dynamischer Regler



Abtasttheorem

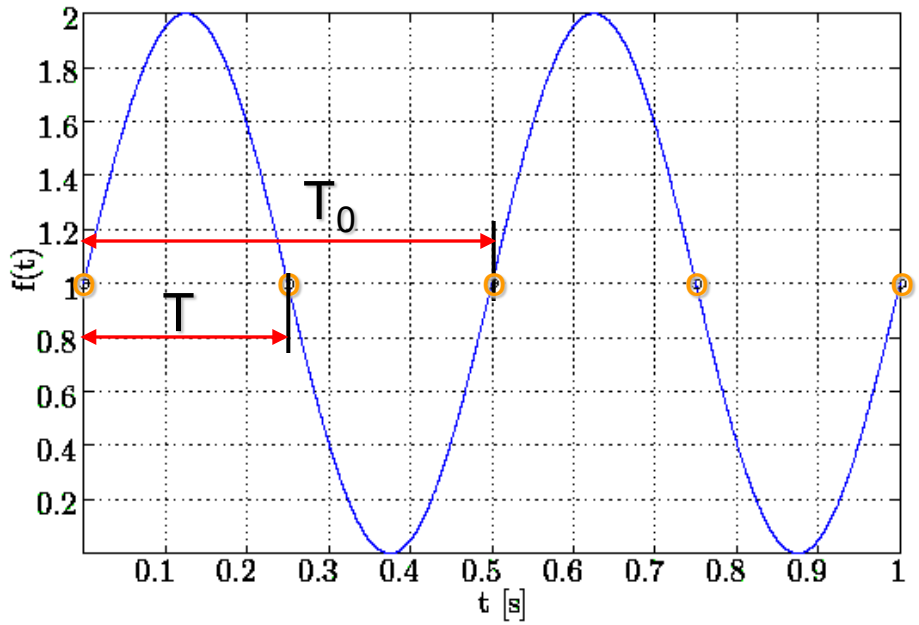


Bild 2.16: Abgetastetes Sinussignal

Periodendauer: $T_0 = 0{,}5$ s

Frequenz: $f_0 = 2$ Hz

Abtastintervall: $T = 0{,}25$ s

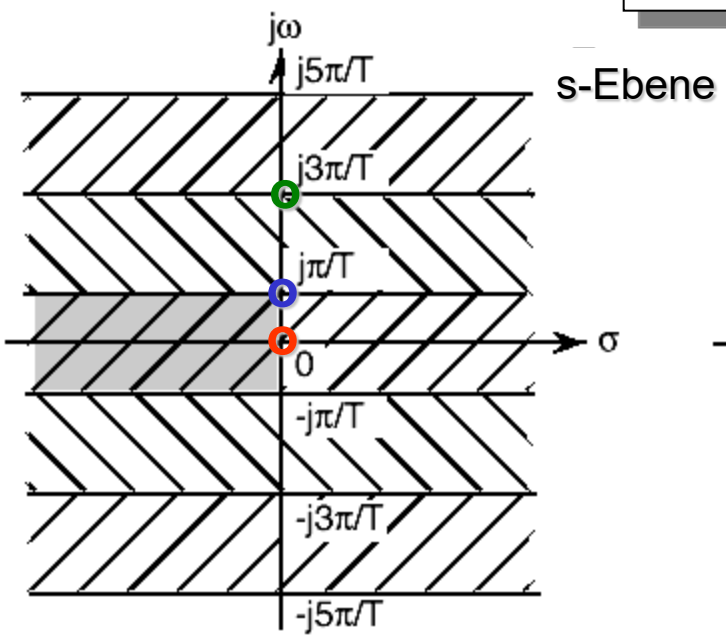
Abtastfrequenz: $f_A = 4$ Hz

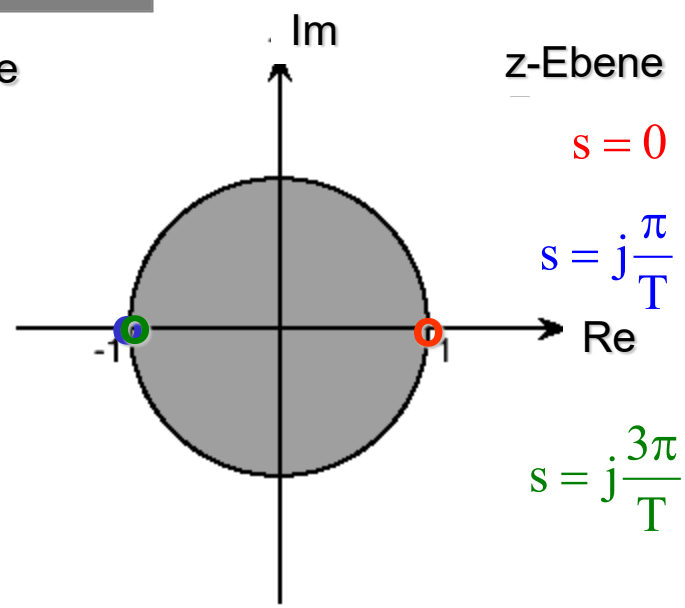
⇒ **Die abgetasteten Werte des Sinussignals sind von einem Gleichspannungssignal nicht zu unterscheiden, wenn die Abtastfrequenz doppelt so hoch ist, wie die Frequenz des Sinussignals.**

z-Transformation: Zusammenhang s- und z-Ebene

Die Abbildung der s-Ebene auf die z-Ebene ist nicht eineindeutig.

$$z = e^{sT}$$





$$s = 0 \rightarrow z = e^{0 \cdot T} = 1$$

$$s = j\frac{\pi}{T} \rightarrow z = e^{j\frac{\pi}{T} \cdot T} = e^{j\pi} = -1$$

$$s = j\frac{3\pi}{T} \rightarrow z = e^{j\frac{3\pi}{T} \cdot T} = e^{j3\pi} = e^{j\pi} = -1$$

Jeder einzelne Streifen wird eindeutig in dasselbe Gebiet, d.h. auf die gesamte z-Ebene abgebildet.