

➤ **Zeitdiskretes Zustandsraummodell**

- **Zustandsdifferenzengleichung, algebraische Ausgangsgleichung.**
- **Blockschaltbild.**
- **Zustandsraummodell aus Übertragungsverhalten.**
- **Lösung der Zustandsgleichung.**
 - **Transitionsmatrix.**
 - **Bewegungsgleichung.**
- **Zusammenhang zwischen Gewichtsfolge und Zustandsraummodell.**



➤ Äquivalentes zeitdiskretes Zustandsraummodell

$$\mathbf{A}_d = e^{AT}$$

$$\mathbf{b}_d = \int_0^T e^{A\tau'} \mathbf{b} d\tau'$$

$$\mathbf{c}_d^T = \mathbf{c}^T$$

$$d_d = d$$

Abtastzeit

Erreichbarkeit

Ein zeitdiskretes System (A, b) heißt vollständig erreichbar, wenn es vom Ursprung $x_0 = 0$ durch eine endliche Eingangsfolge $u(0), \dots, u(N)$ in einen beliebig vorgebenen Endzustand $x(N) = x_e$ überführt werden kann.

Steuerbarkeit

Ein zeitdiskretes System (A, b) heißt vollständig zustandssteuerbar, wenn es von jedem beliebigen Anfangszustand x_0 durch eine endliche Eingangsfolge $u(0), \dots, u(N)$ in den Nullzustand $x(N) = 0$ überführt werden kann.



Steuer- und Erreichbarkeit kontinuierlicher Systeme

Wenn ein kontinuierliches System vollständig **steuerbar** ist, dann existiert für jeden Anfangswert \mathbf{x}_0 eine geeignete Eingangsgröße $u(t)$, $0 \leq t \leq t_e$, so daß

$$\mathbf{0} = \Phi(t_e)\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_e} \Phi(t_e - \tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

gilt.

strebt für stabile Systeme nur **asymptotisch** gegen Null.

Für ein vollständig **erreichbares** System existiert für jedes beliebige $\mathbf{x}(t_e)$ eine Eingangsgröße $u(t)$, $0 \leq t \leq t_e$, die die Gleichung

$$\mathbf{x}(t_e) = \int_0^{t_e} \Phi(t_e - \tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

erfüllt.



Steuer- und Erreichbarkeit kontinuierlicher Systeme

Ist ein kontinuierliches System vollständig steuerbar, dann muß offensichtlich gelten:

$$-\Phi(t_e)\mathbf{x}_0 = \int_0^{t_e} \Phi(t_e - \tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

für beliebige \mathbf{x}_0 .



**Steuerbarkeit impliziert Erreichbarkeit,
da $\Phi(t_e)$ immer invertierbar ist.**

Erreichbarkeitskriterium von Kalman

Ein zeitdiskretes System (A, b) ist genau dann vollständig erreichbar, wenn für die Steuerbarkeitsmatrix Q_S gilt:

$$\text{Rang } Q_S = \text{Rang } [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = n.$$

Beweis:

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k)$$

$$x(k) = A^{k-1}bu(0) + A^{k-2}bu(1) + \dots + bu(k-1)$$

$$k=0: \quad x(1) = bu(0)$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} A^{k-1}b & A^{k-2}b & \dots & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k=1: \quad x(2) &= Ax(1) + bu(1) \\ &= Abu(0) + bu(1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} k=2: \quad x(3) &= Ax(2) + bu(2) \\ &= A^2bu(0) + Abu(1) + bu(2) \end{aligned}$$

Kann nur nach u aufgelöst werden, wenn Q_S invertierbar ist.



Erreichbarkeitskriterium von Kalman

Dieses Kriterium ist zwar **hinreichend** für die Steuerbarkeit eines zeitdiskreten Systems aber **nicht** notwendig!

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $b = 0 \Rightarrow \text{Rang } Q_S = 0$

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

$$x_1(k+1) = x_2(k) \quad k=0: \quad x_1(1) = x_2(0)$$

$$x_2(k+1) = 0 \quad x_2(1) = 0$$

$k=1:$

$$x_1(2) = x_2(1) = 0$$

$$x_2(2) = 0$$



$$\Rightarrow \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{0} \quad \text{für } k \geq 1$$

für beliebige Anfangswerte



Ein **nicht** erreichbares aber steuerbares zeitdiskretes System kann immer in 2 Teilsysteme aufgeteilt werden:

- Einen **erreichbaren** Teil, dessen Zustandsvektor mit Hilfe von $u(t)$ in den Ursprung überführt werden kann.
- Einen **nicht erreichbaren** Teil mit Eigenwerten bei Null, dessen Zustand von alleine in wenigen Schritten in den Ursprung geht.

nicht erreichbar

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ \Rightarrow $\text{Rang } Q_S = \text{Rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$

$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $u(k) = ?$ $k=0$

$x_1(1) = 0$

$x_1(k+1) = 0$

$x_2(1) = x_2(0) + u(0) \Rightarrow u(0) = -x_2(0)$

$x_2(k+1) = x_2(k) + u(k)$

$u(k) = \{-1 \ 0 \ 0 \dots\}$

$u(0) = -1$



Steuerbarkeitskriterium

Ein zeitdiskretes System (A, b) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn das Hautus-Kriterium

$$\text{Rang} [\lambda_i \mathbf{I} - A \quad b] = n$$

für alle von Null verschiedenen Eigenwerte λ_i erfüllt ist.

Bei zeitdiskreten Systemen muss man auch zwischen **Beobachtbarkeit** und **Rekonstruierbarkeit** unterscheiden:

Beobachtbarkeit

Ein zeitdiskretes System (A, c) heißt vollständig beobachtbar, wenn der Anfangszustand x_0 aus dem bekannten Verlauf der endlichen Eingangsfolge $u(0), \dots, u(N)$ und der endlichen Ausgangsfolge $y(0), \dots, y(N)$ berechnet werden kann.

Rekonstruierbarkeit

Ein zeitdiskretes System (A, c) heißt vollständig rekonstruierbar, wenn aus dem bekannten Verlauf der endlichen Eingangsfolge $u(0), \dots, u(N)$ und der endlichen Ausgangsfolge $y(0), \dots, y(N)$ der Zustand $x(N)$ berechnet werden kann.



Beobachtbarkeitskriterium von Kalman

Ein zeitdiskretes System (\mathbf{A}, \mathbf{c}) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn für die Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{Q}_B gilt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_B = \text{Rang} [\mathbf{c}, \mathbf{A}^T \mathbf{c}, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c}] = n.$$

Dieses Kriterium ist zwar **hinreichend** für die Rekonstruierbarkeit eines zeitdiskreten Systems aber **nicht** notwendig!

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{x}(N) = ?$ $u(k) = \{1 \ 1 \ 1 \ \dots\}$
 $\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ **nicht beobachtbar**

$x_1(k+1) = u(k)$
 $x_2(k+1) = x_2(k) + u(k)$

nicht beobachtbar aber nur von $u(k)$ abhängig !!

$y(k)$



Rekonstruierbarkeitskriterium

Ein zeitdiskretes System (A, c) ist genau dann vollständig rekonstruierbar, wenn das Hautus-Kriterium

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix} = n$$

für alle von Null verschiedenen Eigenwerte λ_i erfüllt ist.

Fragestellung

Kann die Steuer- und Beobachtbarkeit durch Abtastung verloren gehen ?

Antwort:

Ja !!!



Steuer- und Beobachtbarkeit des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems

Das zeitdiskrete System (A_d, b_d, c_d) , das aus dem kontinuierlichen System (A, b, c) durch Abtastung mit der Abtastzeit T entsteht, ist genau dann vollständig steuer- und beobachtbar

- wenn das kontinuierliche System (A, b, c) **vollständig steuer- und beobachtbar** ist und
- wenn für zwei verschiedene Eigenwerte λ_i und λ_j ($\lambda_i \neq \lambda_j$) der Matrix A die Bedingung

$$e^{\lambda_i T} \neq e^{\lambda_j T}$$

erfüllt ist.

Steuer- und Beobachtbarkeit des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad c^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$

$\det Q_B = \det \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ \lambda_1 c_1 & \lambda_2 c_2 \end{bmatrix}$
 $= c_1 c_2 \lambda_2 - c_1 c_2 \lambda_1 = c_1 c_2 (\lambda_2 - \lambda_1)$

$\neq 0 \quad \text{für} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

Das kontinuierliche System ist beobachtbar für

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Das zeitdiskrete System ist beobachtbar für

$$e^{\lambda_1 T} \neq e^{\lambda_2 T}$$



Steuer- und Beobachtbarkeit des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems

$$e^{\lambda_1 T} = e^{\lambda_2 T}$$

kann für verschiedene λ_1 und λ_2 nur für 2 komplexe Eigenwerte der kontinuierlichen Matrix A auftreten, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\operatorname{Re}\{\lambda_1\} = \operatorname{Re}\{\lambda_2\}$$

$$(\operatorname{Im}\{\lambda_1\} - \operatorname{Im}\{\lambda_2\})T = \pm 2\pi m, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$(\omega_1 - \omega_2)T = \pm 2\pi m, \quad m = 1, 2, \dots$$

T darf nicht so gewählt werden, daß diese Gl. erfüllt ist !!!!

Für $\omega_2 = -\omega_1$ und $m = 1$ folgt $2\omega_1 T = 2\pi$ bzw. $2\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ bzw. $\omega_1 = \omega_A/2$



$$\omega_A > 2\omega_1 \quad \text{mit} \quad \omega_A = \frac{2\pi}{T}$$

stellt Steuer- und Beobachtbarkeit des diskreten Systems sicher.

Mit dem Entwurf auf endliche Einstellzeit besteht bei zeitdiskreten Systemen eine Möglichkeit, die keine Entsprechung bei zeitkontinuierlichen Systemen hat.

Gesucht ist eine Zustandsrückführung

$$u(k) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}(k) \quad ,$$

die das System

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \quad , \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$$

in den Endzustand

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(n) = \mathbf{0}$$

überführt.

n = Anzahl der Zustandsgrößen



Satz:

Ein vollständig erreichbares zeitdiskretes System (A,b) wird durch eine Zustandsrückführung in endlicher Zeit - und zwar **spätestens** nach n Zeitschritten - von jedem beliebigen Anfangszustand in den Nullzustand überführt, wenn die Rückführung so gewählt wird, daß das rückgeführte System den **n -fachen** Eigenwert

$$\lambda = 0$$

hat.



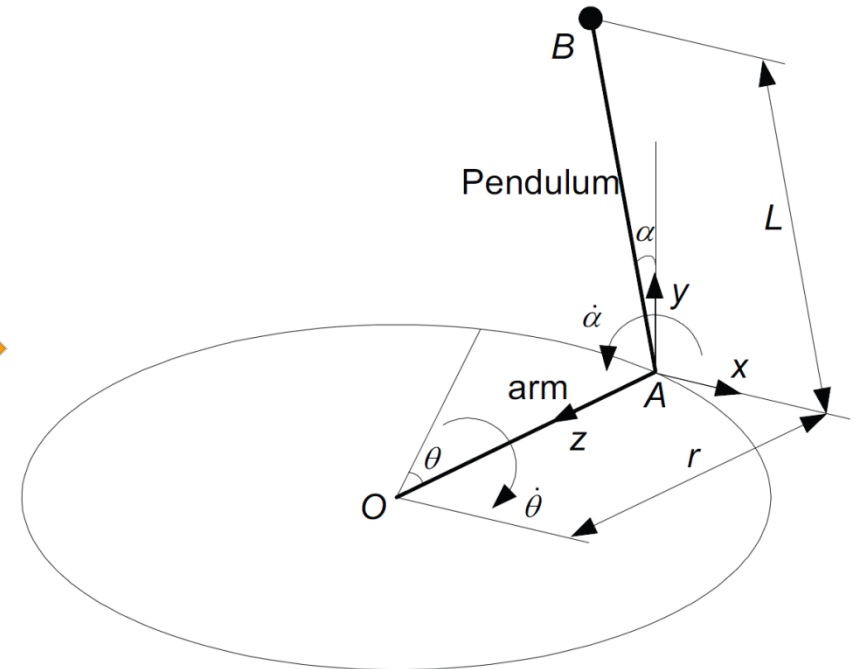
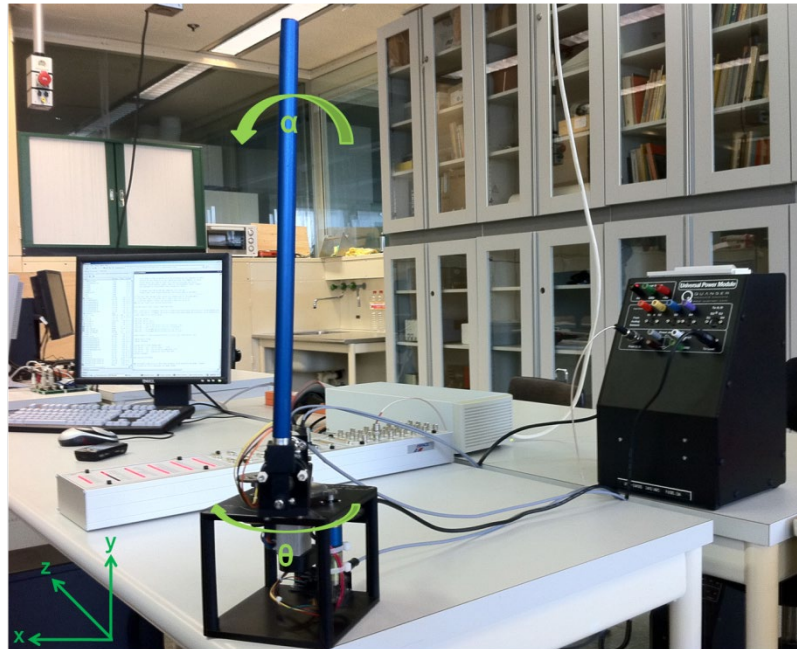
Regelgesetz:

$$u(k) = - \underbrace{[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b]^{-1} A^n}_{\text{Letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix}} x(k)$$

Letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix



Stabilisierung eines aufrechten Pendels



Ergebnisse für $\alpha = 0,1 \text{ rad}$ (5,8 grad) und $T = 50 \text{ ms}$:

