

## ➤ Nullstellen von Abtastsystemen

- Untersuchung einer Reihenschaltung von I-Systemen.
  - Kontinuierliche Üfkt. hat **keine** Nullstellen.
  - z-Üfkt. des Abtastsystems hat  **$n-1$**  Nullstellen.
  - Das Zählerpolynom der z-Üfkt. des Abtastsystems ist ein sogenanntes Euler-Frobenius-Polynom.
  - Werden mehr als 2 Integratoren hintereinander geschaltet, dann ist das Abtastsystem für  **$T \rightarrow 0$**  immer **nichtminimalphasig**.
- Eigenschaften von Euler-Frobenius-Polynome.



## ➤ Nullstellen von Abtastsystemen

- Unterscheidung zwischen **Diskretisierungs-** und den **eigentlichen Nullstellen**.
- **Diskretisierungsnullstellen** sind vom Differenzgrad des kontinuierlichen Systems und der Abtastzeit abhängig und streben für  $T \rightarrow 0$  gegen die Nullstellen der entsprechenden Euler-Frobenius-Polynome.
- Die **eigentlichen Nullstellen** wandern für  $T \rightarrow 0$  gegen den Wert  $z = 1$ .
- Ansonsten existiert zwischen den **kontinuierlichen** und den **eigentlichen diskreten Nullstellen** kein allgemeingültiger Zusammenhang.

```
% WOK des kontinuierlichen und zeitdiskreten Modells eines PT_3-Systems
```

```
%
```

```
s = tf('s');
```

```
T_1 = 1;
```

```
%
```

```
% Kontinuierliches Modell
```

```
%
```

```
G_s = 1/((1+T_1*s)*(1+T_1*s)*(1+T_1*s))
```

```
%
```

```
rlocus(G_s) % WOK
```

```
axis([-2.5 0.5 -3 3])
```

```
hold on
```

```
%
```

```
% Zeitdiskretes Modell
```

```
%
```

```
T = 0.5;
```

```
% Abtastzeit mit Hilfe einer Faustformel in Unbehauen: RT II, S.142
```

```
G_z = c2d(G_s,T)
```

```
%
```

```
figure(2)
```

```
rlocus(G_z) % WOK
```

```
axis([-7 1.5 -4 4])
```

Vergleich der WOK eines kontinuierlichen und des zugehörigen Abtastsystems mit  $T = 0.5 \text{ s}$  ( $\omega_A = 2\pi/T = 4\pi$ )

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

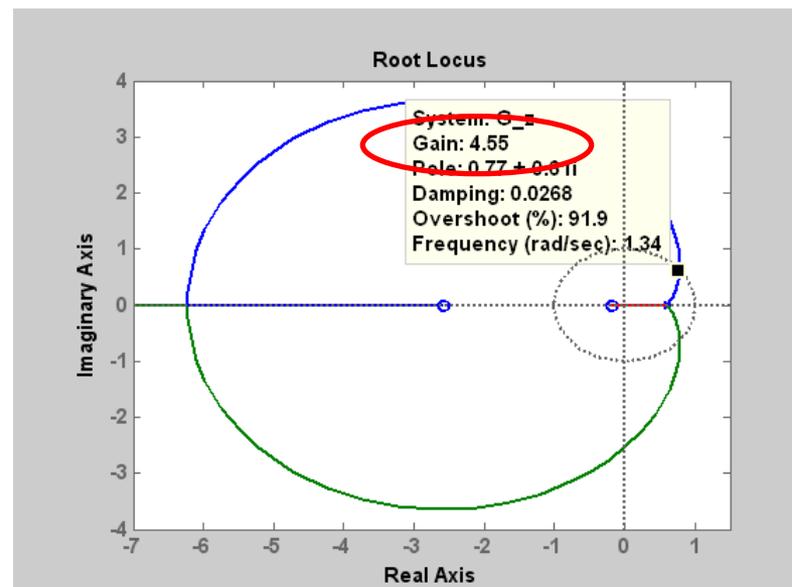
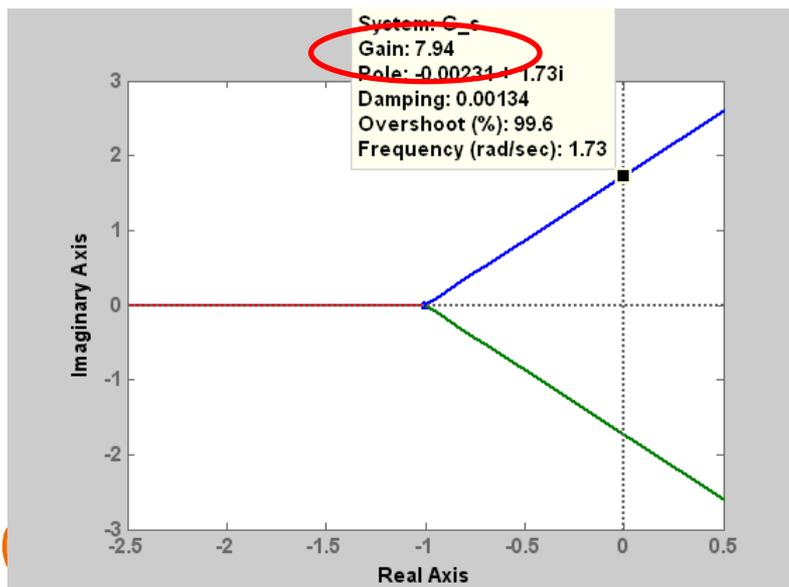
Bandbreite  $\omega_B \approx 0,55 \text{ rad/s}$

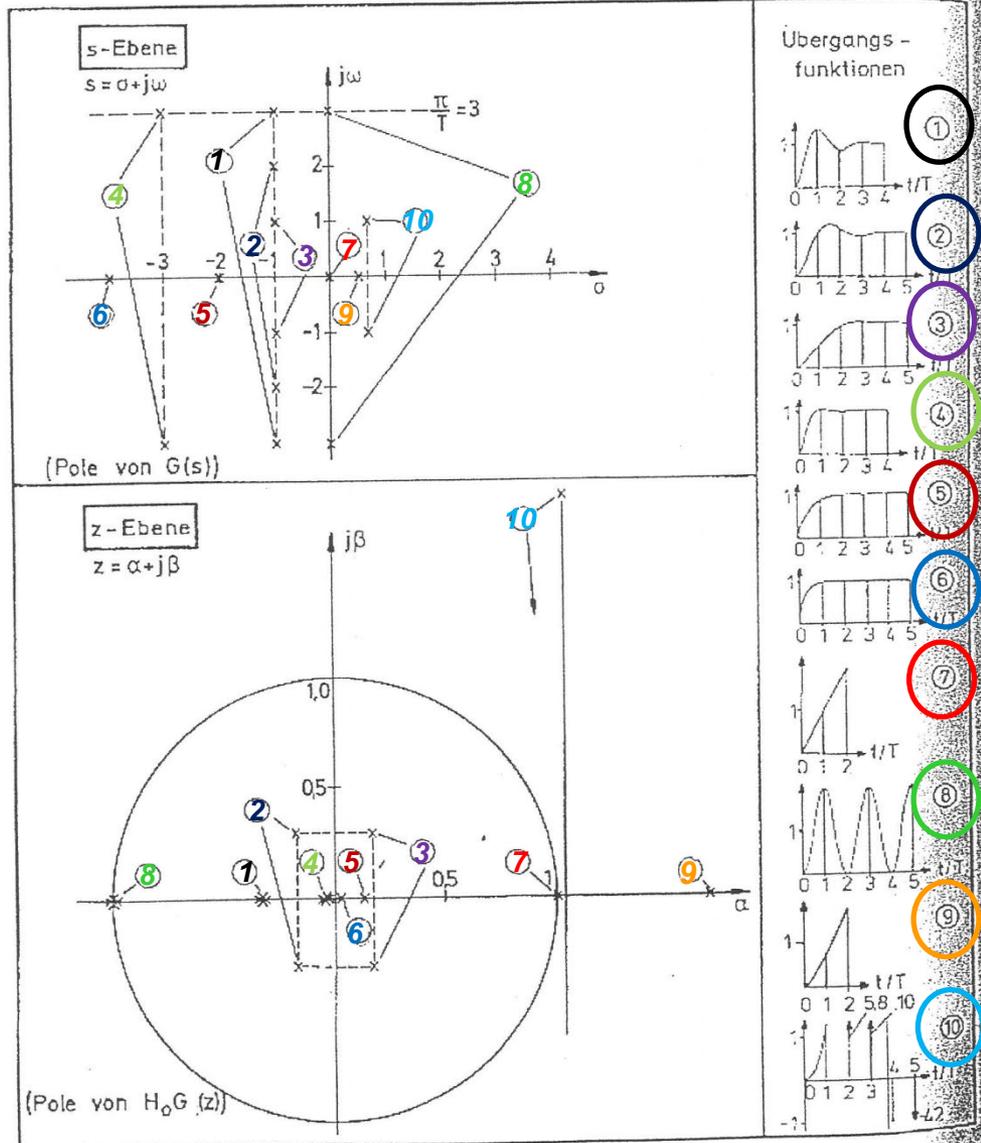
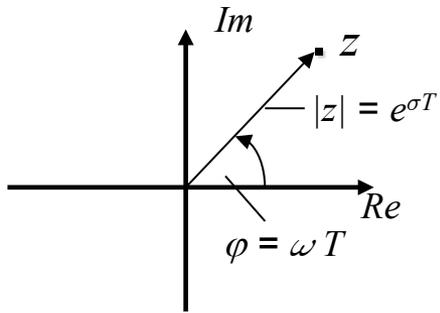
$$G(z) = \frac{0.01439z^2 + 0.03973z + 0.006794}{(z - 0.6065)^3}$$

Nullstellen: -0,18; -2,6

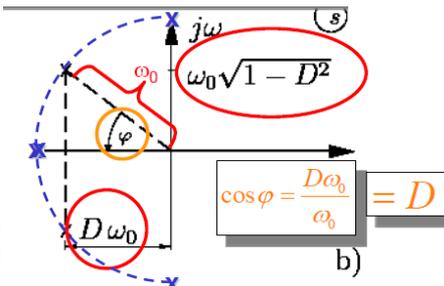
Wahl der Abtastzeit mit Hilfe einer Faustformel von Unbehauen:  $0,23/\omega_B \leq T \leq 0,38/\omega_B$

Euler-Frobenius-Nullstellen: -0,26; -3,732





$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2D}{\omega_0}s + 1}$$



## Kontinuierliche Systeme

### Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

Vektordifferentialgleichung  
1. Ordnung

### Ausgangsgleichung

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + d u(t)$$

## Zeitdiskrete Systeme

### Zustandsdifferenzengleichung

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Differenzgleichungen  
1. Ordnung

### Ausgangsgleichung

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + d u(k)$$

Algebraische Gleichung

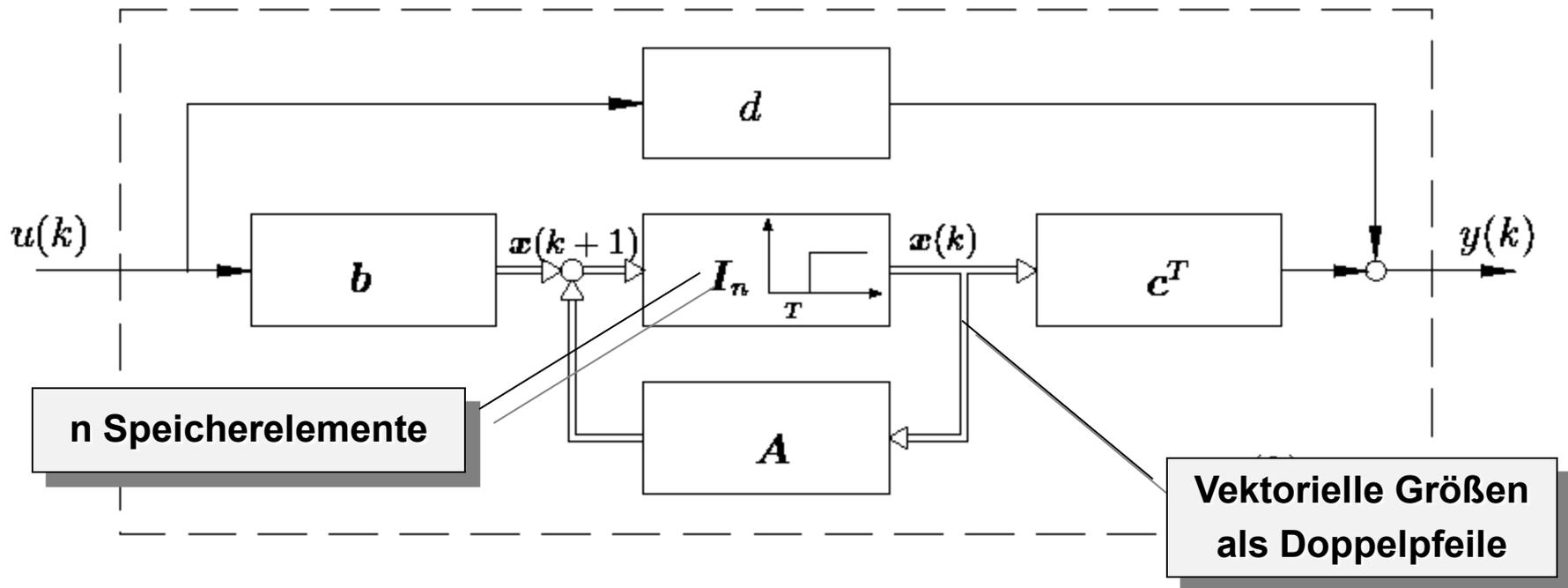
$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n ; u \in \mathbb{R} ; y \in \mathbb{R}$$



## Blockschaltbild des diskreten Zustandsraummodells

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(k) + d u(k)$$



## Zustandsraummodell aus Übertragungsdifferenzgleichung

**Gegeben:**

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_0u(k)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

**Wahl der Zustandsgrößen  $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$ :**

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) \\ x_2(k) &= y(k+1) &= x_1(k+1) \\ x_3(k) &= y(k+2) &= x_2(k+1) \\ &\vdots \\ x_n(k) &= y(k+n-1) &= x_{n-1}(k+1) \\ & & y(k+n) = x_n(k+1) \end{aligned}$$



## Zustandsraummodell aus Übertragungsdifferenzengleichung

**Gegeben:**

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_0u(k) \\ k = 0, 1, 2, \dots$$

**Zustandsmodell:**

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \mathbf{x}(k) .$$

**Systemmatrix A in Frobeniusform**



## Kontinuierliche Systeme

### Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0$$

mit der Matrixexponentialfkt.

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \frac{A^3}{3!} t^3 + \dots$$

### Transitionsmatrix

$$\Phi(t) = e^{At}$$



## Zeitdiskrete Systeme

### Lösung der homogenen Differenzengleichung

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$$

,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$k=0: \mathbf{x}(1) = A\mathbf{x}(0)$$

$$k=1: \mathbf{x}(2) = A\mathbf{x}(1)$$

$$= A^2 \mathbf{x}(0)$$

Allgemein:  $\mathbf{x}(k) = A^k \mathbf{x}(0)$

Transitionsmatrix:  $\Phi(k) = A^k$

## Kontinuierliche Systeme

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für  $x_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Faltungsintegral

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{b}u(\tau) d\tau$$

## Zeitdiskrete Systeme

Lösung der inhomogenen Differenzengleichung für  $x_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k), \\ & \quad k=0,1,2,3,\dots \end{aligned}$$

$$k=0: \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{b}u(0)$$

$$\begin{aligned} k=1: \quad \mathbf{x}(2) &= A\mathbf{x}(1) + \mathbf{b}u(1) \\ &= A\mathbf{b}u(0) + \mathbf{b}u(1) \end{aligned}$$

$$k=2: \quad \mathbf{x}(3) = A\mathbf{x}(2) + \mathbf{b}u(2)$$

Faltungssumme

$$= A^2 \mathbf{b}u(0) + A\mathbf{b}u(1) + \mathbf{b}u(2)$$



$$\mathbf{x}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k-1-i) \mathbf{b}u(i)$$



## Kontinuierliche Systeme

### Bewegungsgleichung

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{b}u(\tau) d\tau$$

### Systemausgang

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t)$$

$$= \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T \Phi(t-\tau) \mathbf{b}u(\tau) d\tau + du(t)$$

## Zeitdiskrete Systeme

### Bewegungsgleichung

$$\mathbf{x}(k) = A^k \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} \mathbf{b}u(i)$$

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k) \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k-1-i) \mathbf{b}u(i)$$

### Systemausgang

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + du(k)$$

$$= \mathbf{c}^T \Phi(k) \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{c}^T \Phi(k-1-i) \mathbf{b}u(i) + du(k)$$



## Kontinuierliche Systeme

Gewichtsfunktion für  $x_0 = 0$ .

$$u(t) = \delta(t)$$

$$y(t) = \int_0^t \mathbf{c}^T \boldsymbol{\Phi}(t-\tau) \mathbf{b} \delta(\tau) d\tau + d\delta(t)$$



$$g(t) = \mathbf{c}^T \boldsymbol{\Phi}(t) \mathbf{b} + d\delta(t)$$

$$g(t) = \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{b} + d\delta(t)$$

für  $d = 0$



## Zeitdiskrete Systeme

Gewichtsfolge für  $x_0 = 0$ .

$$u(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{c}^T \boldsymbol{\Phi}(k-1-i) \mathbf{b} \delta(i) + d\delta(k)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{b} \delta(i) + d\delta(k)$$



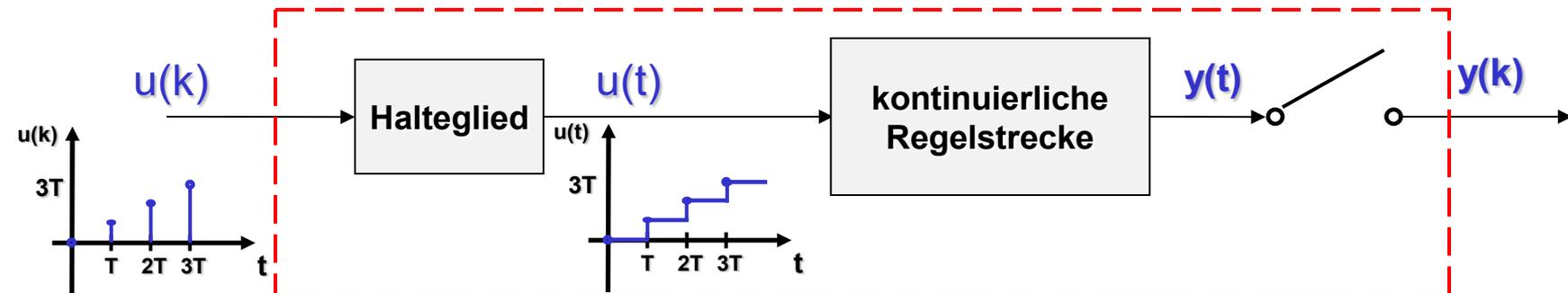
$$g(k) = \begin{cases} d & \text{für } k = 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} & \text{für } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Gegeben ist das kontinuierliche Zustandsraummodell der Regelstrecke:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)$$

Gesucht ist das zugehörige zeitdiskrete Zustandsraummodell für die folgende Konfiguration:



$$u(t) = \text{const.} \quad \text{im Intervall } [t_k, t_{k+1}]$$

**Lösung der kontinuierlichen Zustandsgleichung:**

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau$$

**Für**  $t = t_{k+1}$ ,  $t_0 = t_k$

**erhält man**

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau$$

**und für äquidistante Abtastung**

$$t_{k+1} - t_k = T, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = e^{AT} \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau$$



Im Integrationsintervall ist

$$u(\tau) = u(t_k) = \text{const.}$$

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = e^{AT} \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau \mathbf{b} u(t_k)$$

Für die Substitution

$$\tau' = f(\tau) = t_{k+1} - \tau$$

erhält man

$$d\tau' = \frac{d\tau'}{d\tau} d\tau = -d\tau$$

und die neuen Integrationsgrenzen:

$$\tau = t_{k+1} \implies \tau' = 0 \quad \text{und} \quad \tau = t_k \implies \tau' = t_{k+1} - t_k = T$$

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = e^{AT} \mathbf{x}(t_k) + \int_T^0 e^{A\tau'} (-d\tau') \mathbf{b} u(t_k)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{AT} \mathbf{x}(k) + \int_0^T e^{A\tau'} \mathbf{b} d\tau' u(k)$$



**Zustandsgleichung des zeitdiskreten Zustandsraummodell:**

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{AT} \mathbf{x}(k) + \int_0^T e^{A\tau'} \mathbf{b} d\tau' u(k)$$

**Vergleich mit der Definition des zeitdiskreten Zustandsraummodells**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_d u(k), \\ y(k) &= \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}(k) + d_d u(k) \end{aligned}$$

**liefert:**

$$\mathbf{A}_d = e^{AT}$$

$$\mathbf{b}_d = \int_0^T e^{A\tau'} \mathbf{b} d\tau'$$

$$\mathbf{c}_d^T = \mathbf{c}^T$$

$$d_d = d$$



## Beispiel:

Gegeben die DGL eines  $PT_1$ -Systems:

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Aufstellen eines kontinuierlichen Zustandsraummodells

$$x_1(t) = y(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{T_1} x_1(t) + \frac{1}{T_1} u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = a &= -\frac{1}{T_1}, \quad \mathbf{b} = b = \frac{1}{T_1} \\ \mathbf{c}^T = c &= 1, \quad d = 0 \end{aligned}$$



## Äquivalentes zeitdiskretes Zustandsraummodell:

$$A_d = a_d = e^{aT} = e^{-\frac{1}{T_1}T}$$

$$b_d = b_d = \int_0^T e^{a\tau'} b d\tau'$$

$$= \int_0^T e^{-\frac{1}{T_1}\tau'} \frac{1}{T_1} d\tau' = -T_1 e^{-\frac{\tau'}{T_1}} \frac{1}{T_1} \Big|_0^T$$

$$= -e^{-\frac{T}{T_1}} + e^{-\frac{0}{T_1}} = -e^{-\frac{T}{T_1}} + 1$$

$$= 1 - a_d$$

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= a_d x_1(k) + (1 - a_d) u(k) \\ y(k) &= x_1(k) \end{aligned}$$



Für  $T_1 = T = 1$  erhält man:

$$x_1(k+1) = 0,368 \cdot x_1(k) + 0,632 \cdot u(k)$$

Gesucht die Antwort auf  $u(k) = 1(k)$ ,  $x_1(0) = 0$

$k = 0$ :

$$y(0) = x_1(0) \quad \boxed{= 0}$$

$$x_1(1) = 0,368 \cdot x_1(0) + 0,632 \cdot u(0) \\ = 0,632$$

$k = 1$ :

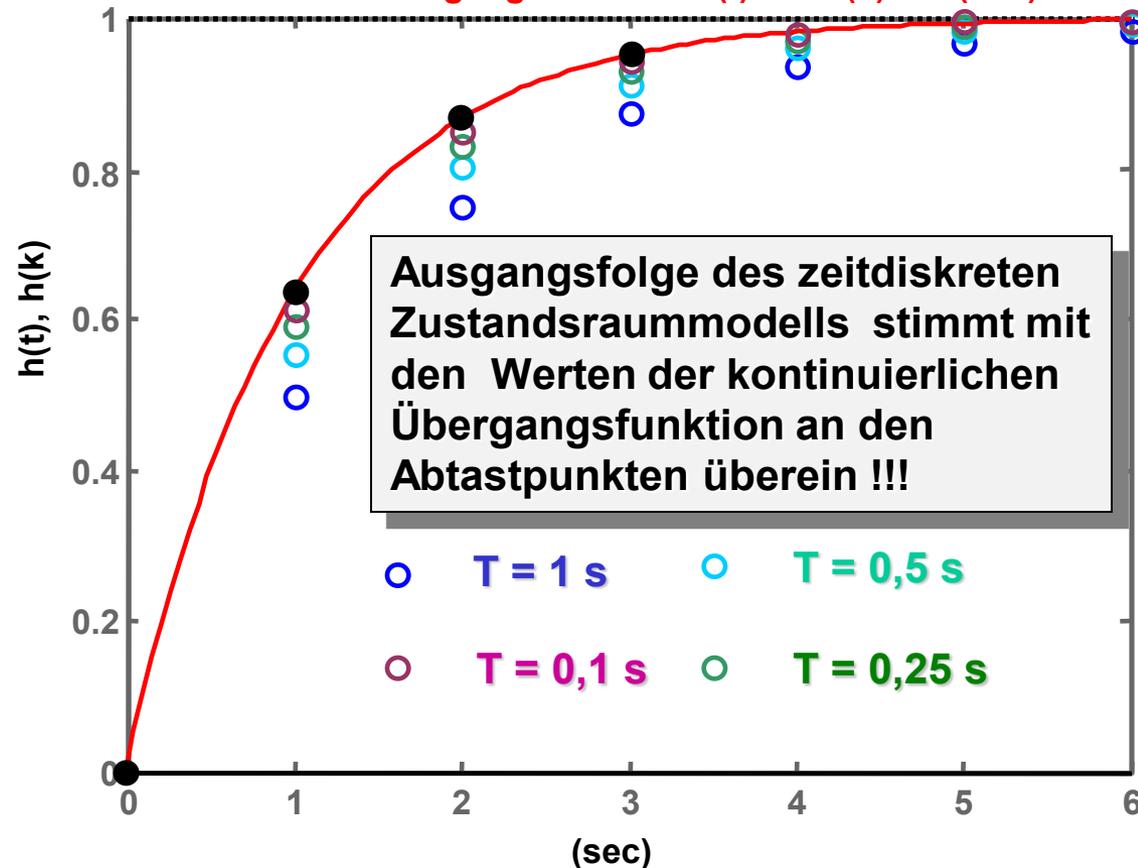
$$y(1) = x_1(1) \quad \boxed{= 0,632}$$

$$x_1(2) = 0,368 \cdot x_1(1) + 0,632 \cdot u(1) \\ = 0,368 \cdot 0,632 + 0,632 \\ = 0,865$$

$k = 2$ :

$$y(2) = x_1(2) \quad \boxed{= 0,865}$$

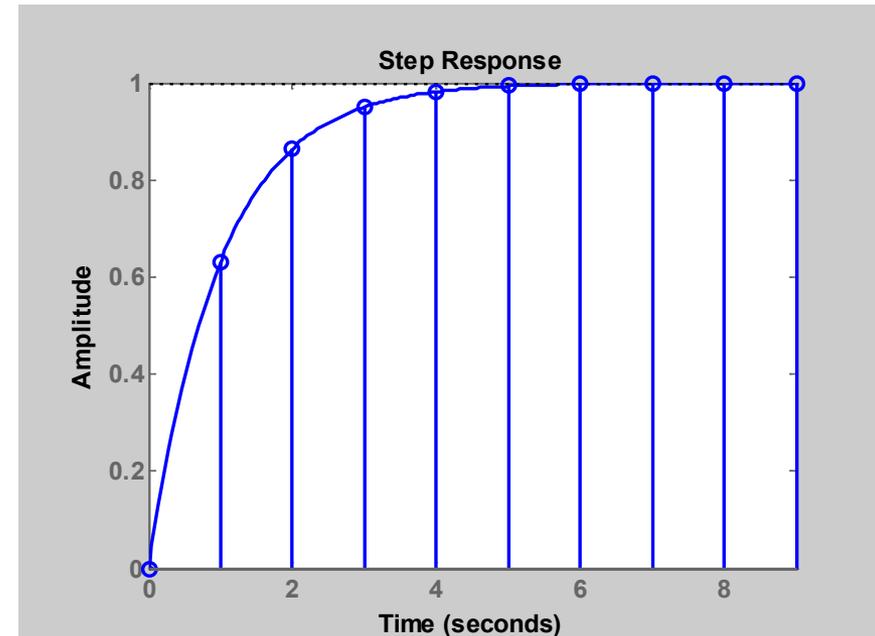
Übergangsfunktion  $h(t)$  für  $G(s) = 1/(1+s)$



```

%
% Äquivalentes zeitdiskretes Zustandsraummodell eines PT1-Systems
%
T1 = 1;
a = -1/T1;
b = 1/T1;
c = 1;
d = 0;
%
% Kontinuierliches Zustandsraummodell
%
sys_k = ss(a,b,c,d)
%
T = 1 % Abtastintervall
%
sys_d = c2d(sys_k,T) % Conversion of continuous-time models to discrete time.
%
figure(1)
%
step(sys_k) % kontinuierliche Sprungantwort
hold on
[y,t] = step(sys_d,10); % diskrete Sprungantwort
stem(t,y)

```



```
t = 0:0.1:5;
u = t;
```

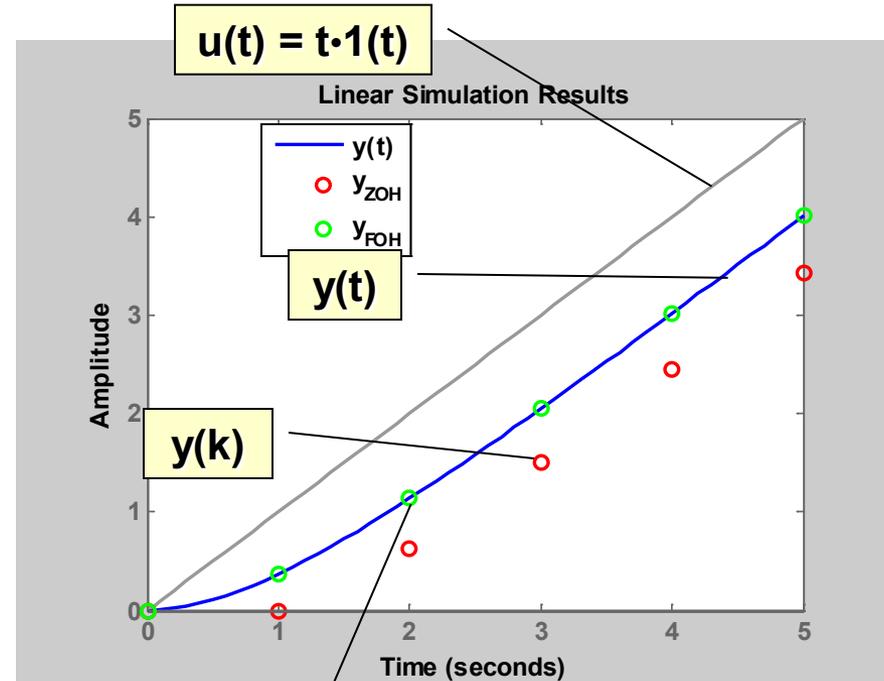
```
% kontinuierliche Rampenantwort
lsim(sys_k,u,t)
```

```
%
hold on
t = 0:1:5;
u = t;
```

```
% diskrete Rampenantwort
[y1,t] = lsim(sys_d,u,t);
stem(t,y1,'r','LineStyle','none')
```

```
% diskrete Rampenantwort mit Halteglied 1. Ordnung
```

```
[y2,t] = lsim(c2d(sys_k,T,'foh'),u,t)
stem(t,y2,'g','LineStyle','none')
legend('y(t)','y_{ZOH}','y_{FOH}')
```



## Kontinuierliche Systeme

## Zeitdiskrete Systeme

### Charakteristische Gleichung

$$C(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$$

$$C(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_d)$$

**Asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte  $\lambda$  in der linken  $\lambda$ -Halbebene liegen.**

**Asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte  $\lambda$  im Inneren des Einheitskreises liegen.**