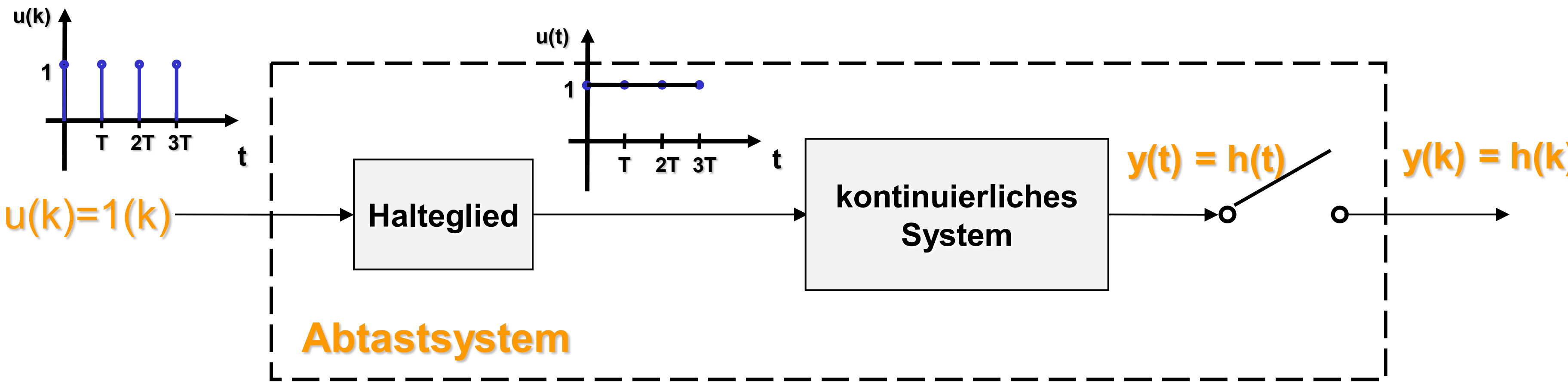
Zusammenfassung der 4. Vorlesung



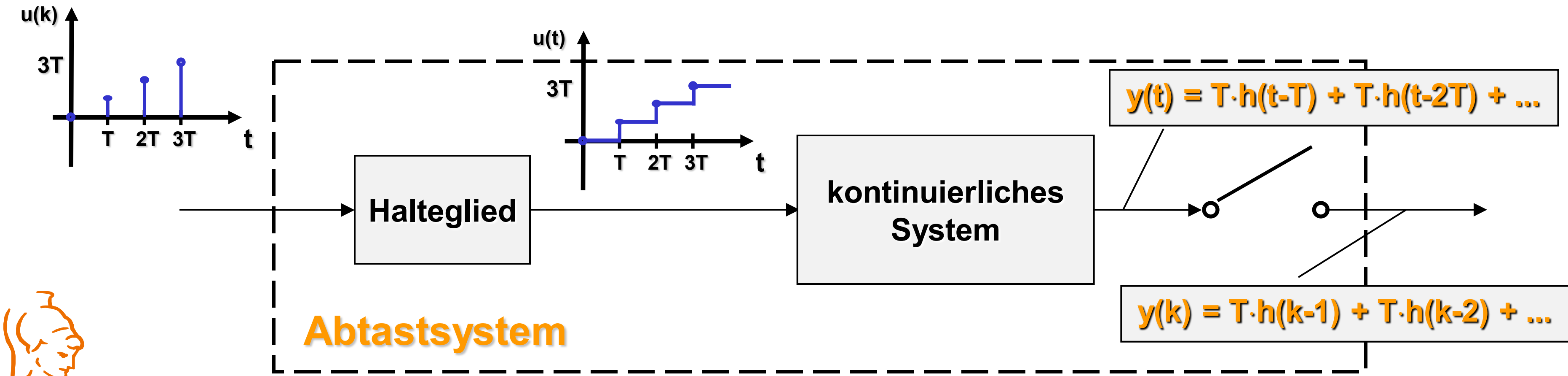
- **z-Übertragungsfunktionen von Abtastsystemen:**
  - **A/D- und D/A-Umsetzer werden mit der Regelstrecke zusammengefasst (Abtastsystem).**

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\{h(kT)\}$$

Übergangsfolge des kontinuierlichen Systems

Zusammenfassung der 4. Vorlesung

- Übergangsfolge der (sprung-)äquivalenten z-Übertragungsfunktion stimmt für sprungförmige Anregungen mit den Werten der kontinuierlichen Übergangsfunktion an den Abtastpunkten überein.
- Für rampenförmige Eingangssignale trifft dies nicht zu !!!!!



Zusammenfassung der 4. Vorlesung

- **Stabilität zeitdiskreter Systeme.**
  - **Zeitbereich:**

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} |\, g(k) \,| = 0}$$

  - **Frequenzbereich:**

    Pole von *G(z)* müssen innerhalb des Einheitskreises liegen.

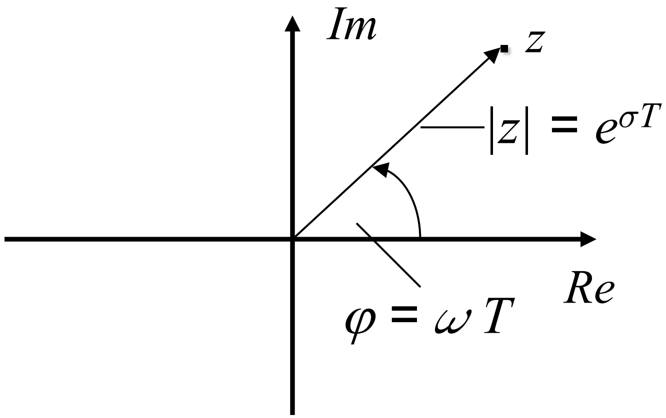
Zusammenfassung der 4. Vorlesung

- **Zusammenhang zwischen den Polen des kontinuierlichen und des diskreten Systems**
  - **Betrag von z hängt nur vom Realteil σ ab:**

$$|z| = |e^{(\sigma + j\omega)T}| = |e^{\sigma T}| \cdot |e^{j\omega T}| \boxed{= e^{\sigma T}}$$

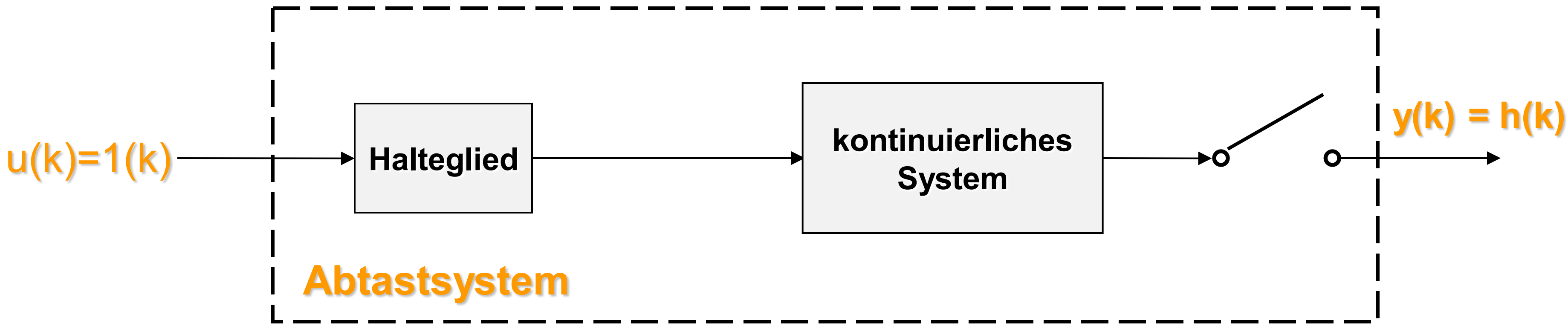
  - **Das Argument von z wird nur von ω bestimmt:**

$$\boxed{\arg z = \varphi = \omega T}$$



Nullstellen von Abtastsystemen

Betrachtet werden lineare Abtastsysteme



Frage:

Gibt es auch einen eindeutigen Zusammenhang zwischen den Nullstellen von $G(s)$ und den Nullstellen von $G(z)$?

Nullstellen von Abtastsystemen (2)

Beispiel:

Das kontinuierliche System bestehe aus einer Reihenschaltung von zwei Integratoren mit der Übertragungsfunktion

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^2}\ .}$$

Eine Berechnung der äquivalenten *z*-Übertragungsfunktion ist mit Hilfe der folgenden Gleichung möglich:

$$\boxed{G(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\{h(k)\}\ .}$$

Zunächst ist die Berechnung von *h(t)* erforderlich:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot U(s)\} \text{ für } U(s) = \frac{1}{s}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\}\ .$$

Nullstellen von Abtastsystemen (3)

Mit Hilfe der Korrespondenz 2 der Tabelle A2 im Skript SRT erhält man:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\} \quad = \frac{1}{2}t^2$$

Anwendung der *z*-Transformation auf die abgetastete Übergangsfunktion h(t) liefert dann mittels der Korrespondenz 4 in Tabelle 3.3:

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\frac{1}{2}t^2|_{t=kT}\} = \frac{T^2 z\cdot(z+1)}{2(z-1)^3} \;.}$$

Damit ergibt sich die gesuchte äquivalente *z*-Übertragungsfunktion des Doppelintegriers zu:

$$G(z) = \frac{z-1}{\cancel{z}} \cdot \frac{T^2 \cancel{z}\cdot(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$= \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2} \;.$$

Nullstelle bei *z* = -1

Nullstellen von Abtastsystemen (4)

Allgemein gilt sogar der folgende Zusammenhang (Aström u.a. 1984):

Die äquivalente *z*-Übertragungsfunktion der Übertragungsfunktion *G(s)* = *s*$^{-n}$ **ist**

$$\boxed{G(z) = \frac{T^n}{n!} \frac{B_n(z)}{(z-1)^n}}$$

mit

Immer *n-1* Nullstellen

$$B_n(z) = b_1^n z^{n-1} + b_2^n z^{n-2} + \cdots + b_n^n$$

und

$$b_k^n \;=\; \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l}\, l^n \binom{n+1}{k-l}\,, \qquad k = 1, ..., n\ .$$

Nullstellen von Abtastsystemen (5)

$$\boxed{B_n(z) = b_1^n z^{n-1} + b_2^n z^{n-2} + \cdots + b_n^n}$$

Für *n = 1,...,6* ergeben sich folgende Polynome:

$$\begin{aligned}
B_1(z) &= 1 \\
B_2(z) &= z + 1 \\
B_3(z) &= z^2 + 4z + 1 \\
B_4(z) &= z^3 + 11z^2 + 11z + 1 \\
B_5(z) &= z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1 \\
B_6(z) &= z^5 + 57z^4 + 302z^3 + 302z^2 + 57z + 1
\end{aligned}$$

n	nicht stabile Nullstellen von $B_n(z)$
2	-1
3	$-3,732$
4	$-1; \ -9,899$
5	$-2,322, \ -23,20$
6	$-1; \ -4,542; \ -51,22$

Die Polynome *$B_n(z)$* sind sogenannte Euler-Frobenius-Polynome (Weller u.a. 1997), die auch durch die folgende Rekursionsformel berechnet werden können:

$$\begin{aligned}
B_1(z) &= 1 \\
B_{k+1}(z) &= (1 + kz)B_k(z) + z(1-z)\frac{dB_k(z)}{dz}, \qquad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Nullstellen von Abtastsystemen (6)

Euler-Frobenius-Polynome haben folgende Eigenschaften:

- Die Wurzeln der Polynome $B_n(z)$ sind reell, einfach und immer negativ.
- Wenn n_i^* eine Wurzel von $B_n(z)$ ist, dann ist $\frac{1}{n_i^*}$ ebenfalls eine Wurzel von $B_n(z)$.
- Außerdem gilt $B_n(1) = n!$.

Für beliebige rationale Übertragungsfunktionen *G(s)* existiert kein einfacher Zusammenhang zwischen den Nullstellen des kontinuierlichen und des äquivalenten zeitdiskreten Systems.

Unabhängig von der Anzahl der Nullstellen von *G(s)* hat die *z*-Übertragungsfunktion in der Regel *n-1* Nullstellen.

Allgemeingültige Aussagen können nur für die Grenzfälle $T \rightarrow 0$ und $T \rightarrow \infty$ angegeben werden.

Nullstellen von Abtastsystemen (7)

Satz:

Sei $G(s)$ eine rationale Übertragungsfunktion

$$G(s) = k\frac{(s-n_1)(s-n_2)\cdots(s-n_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

in Pol–Nullstellenform mit $m < n$ und $G(z)$ die zugehörige $z-$Übertragungsfunktion des Abtastsystems.

Wenn die Abtastzeit T gegen Null geht, streben m Nullstellen von $G(z)$ gegen 1, so wie es $e^{n_i T}$ dann tut, und $n-m-1$ Nullstellen von $G(z)$ gegen die Nullstellen des Euler–Frobenius–Polynoms $B_{n-m}(z)$.

Diskretisierungs-nullstellen

die eigentlichen Nullstellen

Nullstellen von Abtastsystemen (8)

Aus diesem Zusammenhang und den Eigenschaften eines Euler-Frobenius-Polynoms folgen diese Aussagen:

- **Die Grenzwerte einiger Nullstellen von** $G(z)$ **sind vom Polüberschuß (Differenzgrad) der Übertragungs-funktion** $G(s)$ **des kontinuierlichen Systems abhängig.**

- **Die äquivalente** z**-Übertragungsfunktion eines kontinuierlichen Systems mit einem Differenzgrad** $n-m > 2$ **wird für entsprechend kleine Abtastzeiten** T **immer Nullstellen außerhalb des Einheitskreises haben.**

- **Dies kann schon bei technisch relevanten Abtastzeiten auftreten, so daß nichtminimalphasige äquivalente zeitdiskrete Systeme häufig vorkommen.**

Beispiel:

Betrachtet wird eine Reihenschaltung von 3 PT_1-Systemen mit der Übertragungsfunktion

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \; .}$$

Die zugehörige *z*-Übertragungsfunktion ergibt sich zu

$$\boxed{G(z) \;=\; \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{(z - e^{-T})^3}}$$

Nullstelle mit *|z| > 1* für *T < 1,8399*

mit

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 - (1 + T + T^2/2)e^{-T} \\ b_2 &= (-2 + T + T^2/2)e^{-T} + (2 + T - T^2/2)e^{-2T} \\ b_3 &= (1 - T + T^2/2)e^{-2T} - e^{-3T} \; . \end{aligned}$$

Nullstellen bei
z_1 = -0,2659 , z_2 = -3,704
für *T = 0,01*

Nullstellen von Abtastsystemen (10)

Für den technisch weniger relevanten Fall von sehr großen Abtastzeiten gilt dieser Zusammenhang:

Satz:

Sei $G(s)$ eine rationale Übertragungsfunktion mit $m < n$ und $G(0) \neq 0$ sowie Re $p_i < 0$. Dann wandern alle Nullstellen der z–Übertragungsfunktion gegen Null, wenn die Abtastzeit T unendlich groß wird.

➥

Nichtminimalphasige kontinuierliche Systeme können durch Abtastung zu minimalphasigen Abtastsystemen werden.

Nullstellen von Abtastsystemen (11)

Beispiel:

Die kontinuierliche Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{6(1-s)}{(s+2)(s+3)}$$

ist stabil und hat eine Nullstelle in der rechten *s*-Halbebene bei *s=1*.

Die Nullstelle der *z*-Übertragungsfunktion des Abtastsystems ergibt sich zu

$$z_1 = -\frac{8e^{-2T} - 9e^{-3T} + e^{-5T}}{1 - 9e^{-2T} + 8e^{-3T}}.$$

Nullstelle mit *|z| = 1* für *T = 1,2485*

Nullstelle mit *|z| < 1* für *T > 1,2485*

w-Transformation

Durch die Transformation

$$w = \frac{z-1}{z+1},$$

$$\begin{array}{rcl} z=1 & \rightarrow & w=0 \\ z=j & \rightarrow & w=j \\ z=-j & \rightarrow & w=-j \end{array}$$

***w*-Transformation genannt, bildet man das Innere des Einheitskreises der *z*-Ebene in die linke *w*-Ebene ab.**

Löst man $w = \frac{z-1}{z+1},$ **nach *z* auf, so erhält man:** $z = \frac{1+w}{1-w}$

Bei einem stabilen zeitdiskreten System werden alle Wurzeln z_i der charakteristischen Gleichung

$$C(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad = \quad 0$$

durch Anwendung dieser Transformation in die linke *w*-Ebene abgebildet.

Anwendung von

$$\boxed{z = \frac{1+w}{1-w}}$$

auf $$\boxed{C(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad = \quad 0}$$

liefert $$\boxed{a_n(\frac{1+w}{1-w})^n + a_{n-1}(\frac{1+w}{1-w})^{n-1} + \ldots + a_1(\frac{1+w}{1-w}) + a_0 \quad = \quad 0}$$

bzw. $$\boxed{\tilde{\alpha}_n w^n + \tilde{\alpha}_{n-1} w^{n-1} + \ldots + \tilde{\alpha}_1 w + \tilde{\alpha}_0 \quad = \quad 0.}$$

➥ **Auf dieses Polynom kann dann wieder das Hurwitz-Kriterium angewendet werden.**

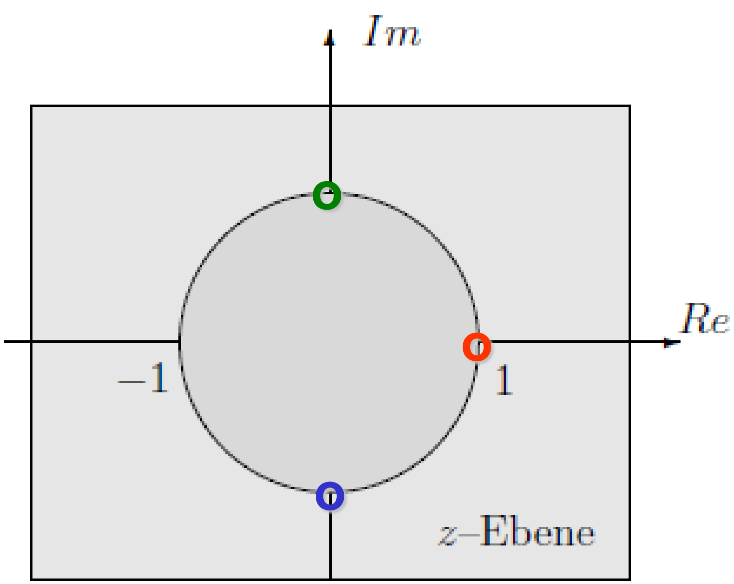
w-Transformation: Zusammenhang z- und w-Ebene

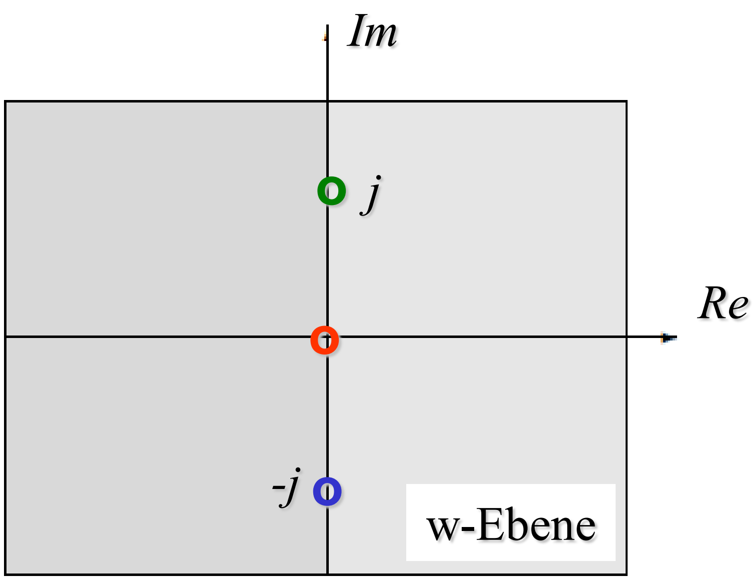
$$\boxed{w = \frac{z-1}{z+1}}$$

$$z = 1 \rightarrow \quad w = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

$$z = j \rightarrow \quad w = \frac{j-1}{j+1} = \frac{(j-1)(j-1)}{(j+1)(j-1)} = \frac{j^2 - 2j + 1}{j^2 - 1} = \frac{-2j}{-2} = j$$

$$z = -j \rightarrow \quad w = \frac{-j-1}{-j+1} = \frac{(j+1)(j+1)}{(j-1)(j+1)} = \frac{j^2 + 2j + 1}{j^2 - 1} = \frac{2j}{-2} = -j$$





w-Transformation mit Matlab

```
%
%  Anwendung der w-Transformation mit Hilfe der Symbolic Math Toolbox
%
w=sym('w')          % Definition von w als symbolische Variable
%
z=(1+w)/(1-w)
%
% Beispiel aus Unbehauen: Regelungstechnik II, S. 139
%
f_z = 2*z^4 - 3*z^3 + 2*z^2 – z + 1
%
f_w=simple(f_z * (1-w)^4);  % Multiplikation mit (1-w)^n und Vereinfachung
%
f_w =

9*w^4 + 8*w^3 + 14*w^2 + 1
```

Kein Hurwitzpolynom, da der Koeffizient a_1 nicht vorhanden ist !!!!