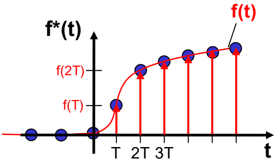
Spektrum diskreter Signale

Gesucht ist eine kontinuierliche Darstellung eines zeitdiskreten Signals *f(kT)*

Darstellung eines zeitdiskreten Signals *f(kT)* mit Hilfe einer Folge von Deltaimpulsen:

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,\delta(t-kT)$$



Periodische Zeitfunktion

Ersetzen der Dirac-Impulsfolge durch die komplexe Fourier-Reihe:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \frac{1}{T} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\omega_A t}$$

$$\omega_A = \frac{2\pi}{T}$$

Nr.		Zeitfunktion	Transformierte	Voraussetzungen
1	Definition	$f(t)\cdot 1(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\cdot e^{st}\mathrm{d}s$	$F(s)=\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\mathrm{d}t$	$c \geq \sigma_0$ [1]
2	Linearität	$k_1 f_1(t)+k_2 f_2(t)$	$k_1 F_1(s)+k_2 F_2(s)$	$k_1, k_2 = \text{const.}$
3	Rechts-verschie-bungssatz	$f(t-a)\cdot 1(t-a)$	$e^{-as}\cdot F(s)$	$a>0$, reell
4	Ähnlich-keitssatz	$f(at)$	$\frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$	$a>0$, reell
5	Dämpfungs-satz	$e^{-at}\cdot f(t)$	$F(s+a)$	a beliebig
6	Differentia-tionssatz	$f^{(n)}(t)$	$s^n\cdot F(s)-\sum\limits_{i=0}^{n-1} s^i\cdot f^{(n-1-i)}(+0)$	$f(t)$ sei $(n-1)$–mal stetig differenzierbar
7	Integra-tionssatz	$\int\limits_0^t\int\limits_0^{\tau_{n-1}}\cdots\int\limits_0^{\tau_1} f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_{n-1}$	$\frac{1}{s^n}\cdot F(s)$	–
8	Faltungs-satz	$\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$F_1(s)\cdot F_2(s)$	Re $s > \max.\sigma_{0_i}$ $i=1,2$
9	Grenzwert-sätze	Anfangswertsatz: $\lim\limits_{t\to+0} f(t)=\lim\limits_{s\to\infty} s\cdot F(s)$ Endwertsatz: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to 0} s\cdot F(s)$		Existenz der Grenzwerte

Tabelle A.1: Definition, Eigenschaften der Laplace–Transformation

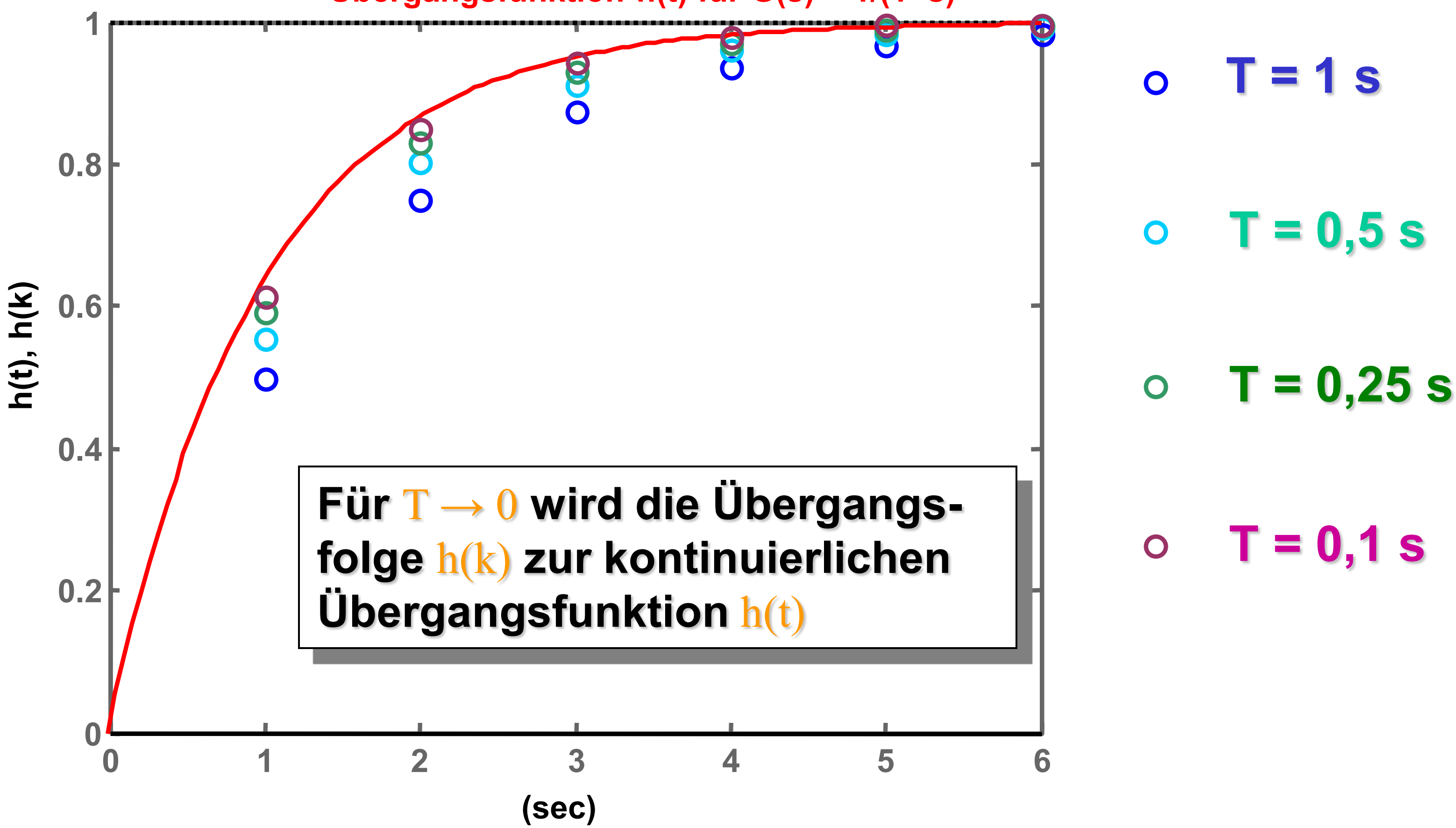
Mit Hilfe einiger weniger dieser Eigenschaften lassen sich gewöhnliche lineare, zeitinvariante Differentialgleichungen in geschlossener Form *algebraisieren*, d. h. die die Dynamik eines Systems beschreibenden Differentialgleichungen werden damit in einfacher und geschlossener Form in sogenannte **Übertragungsfunktionen** überführt. Im folgenden werden einige dieser wichtigen Eigenschaften abgeleitet:

[3] Konvergenzabzsisse

Übergangsfolgen für verschiedene Abtastperioden T

$$y(k) = 0{,}5 \cdot y(k-1) + 0{,}5 \cdot u(k-1) \text{ für } T = T_1 = 1$$

Übergangsfunktion h(t) für G(s) = 1/(1+s)



Für $T \to 0$ wird die Übergangsfolge $h(k)$ zur kontinuierlichen Übergangsfunktion $h(t)$

Abtasttheorem

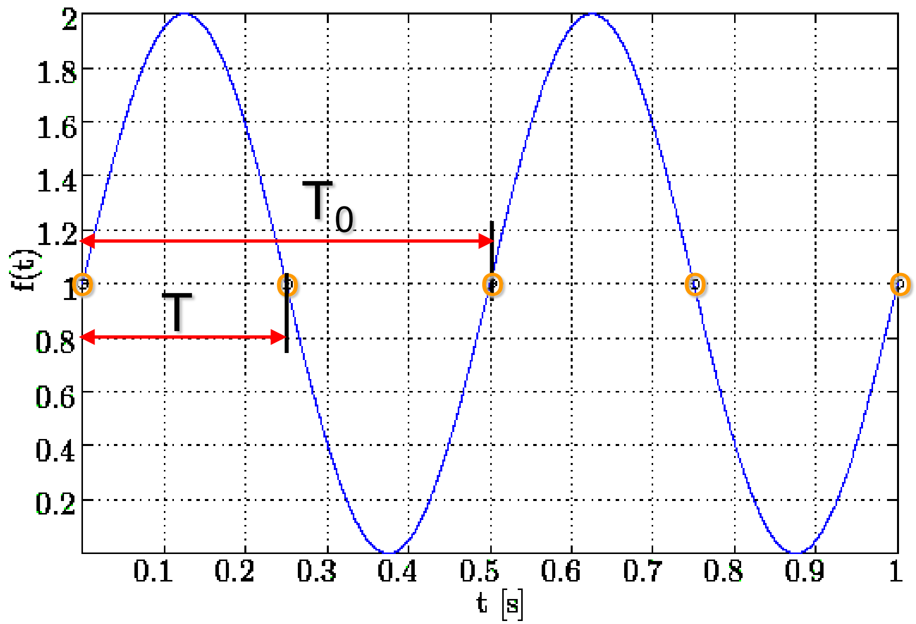


Bild 2.16: Abgetastetes Sinussignal

Periodendauer: $T_0 = 0{,}5$ s

Frequenz: $f_0 = 2$ Hz

Abtastintervall: $T = 0{,}25$ s

Abtastfrequenz: $f_A = 4$ Hz

$\Rightarrow$ **Die abgetasteten Werte des Sinussignals sind von einem Gleichspannungssignal nicht zu unterscheiden, wenn die Abtastfrequenz doppelt so hoch ist, wie die Frequenz des Sinussignals.**

Nr.	Zeitfunktion $f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$F(z) = \mathcal{Z}\{f(kT)\}$
1	δ–Impuls $\delta(t)$	1	1
2	Einheitssprung $1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
4	t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$
7	t^2e^{-at}	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$\frac{T^2e^{-aT}z(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
8	$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
9	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{z\sin\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$
10	$\cos\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{z^2-z\cos\omega_0 T}{z^2-2z\cos\omega_0 T+1}$
11	$1-(1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-c}-\frac{acTz}{(z-c)^2};\quad c=e^{-aT}$
12	$1+\frac{be^{-at}-ae^{-bt}}{a-b}$	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{z}{z-1}+\frac{bz}{(a-b)(z-c)}-\frac{az}{(a-b)(z-d)}$ $c=e^{-aT},\quad d=e^{-bT}$
13	$e^{-at}\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\frac{cz\sin\omega_0 T}{z^2-2cz\cos\omega_0 T+c^2};\quad c=e^{-aT}$
14	$e^{-at}\cos\omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\frac{z^2-cz\cos\omega_0 T}{z^2-2cz\cos\omega_0 T+c^2};\quad c=e^{-aT}$
15	$a^{\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s-(\frac{1}{T})\ln a}$	$\frac{z}{z-a}$

Tabelle 3.3: Korrespondenzentabelle