Zusammenfassung der 3. Vorlesung

- **Beispiel:** Übergangs- und Gewichtsfolge mit Hilfe der Differenzengleichung.
  - Vergleich mit den kontinuierlichen Funktionen.
- Zusammenhang **Gewichts-** und **Übergangsfolge**:

$$g(k) = h(k-1) - h(k), \qquad h(k) = \sum_{j=1}^{k} g(j-1)$$

- **z-Transformation**
  - **Motivation:** Anwendung der **Laplace-Transformation** liefert immer eine transzendente Funktion.
  - **Lösung:** Einführung der **z-Transformation**

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

mit $z = e^{sT}$

Zusammenfassung der 3. Vorlesung

z-Transformation

- Abbildung der s-Ebene in die z-Ebene ($z = e^{sT}$).
- Beispiel: z-Transformierte der Sprungfolge ($F(z)=z/(z-1)$).
- Eigenschaften der z-Transformation
  - Rechtsverschiebungssatz
  - Faltungssatz
  - Grenzwertsätze

Zusammenfassung der 3. Vorlesung

z-Transformation

- **Übertragungsfunktion diskreter Systeme:** $G(z)=Y(z)/U(z)$.
- **Beispiel: z-Übertragungsfunktion eines PT_1-Systems.**
- **Pole und Nullstellen der z-Übertragungsfunktion.**

$$G(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n} = \frac{Z(z)}{N(z)}$$

Die Pole der z-Übertragungsfunkion sind die Lösungen der Gleichung

$$N(z) = 0$$

Die Nullstellen der z-Übertragungsfunkion sind die Lösungen der Gleichung

$$Z(z) = 0$$

Zusammenfassung der 3. Vorlesung

- **Zusammenhang Gewichtsfolge und z-Übertragungsfkt.:**

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g(k)\}$$

- **Ermittlung der Systemverstärkung von kontinuierlichen und zeitdiskreten Systemen mittels der Übertragungsfkt.**

Kontinuierliche Systeme

$$K = \lim_{s \to 0} G(s) = G(0)$$

$$K = \frac{b_0}{a_0}$$

Zeitdiskrete Systeme

$$K = \lim_{z \to 1} z \cdot G(z) = G(1)$$

$$K = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

z-Üfkt. von Abtastsystemen

Abtastregelkreis

kontinuierliche Signale

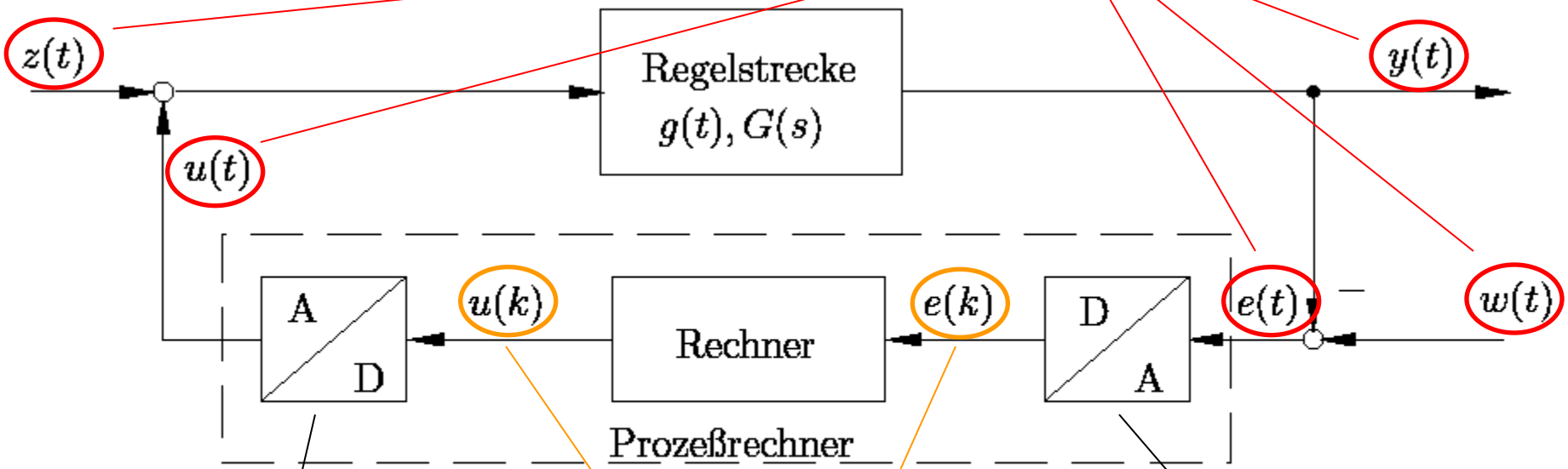


Bild 3.2: Regelkreis mit Prozeßrechnerregelung

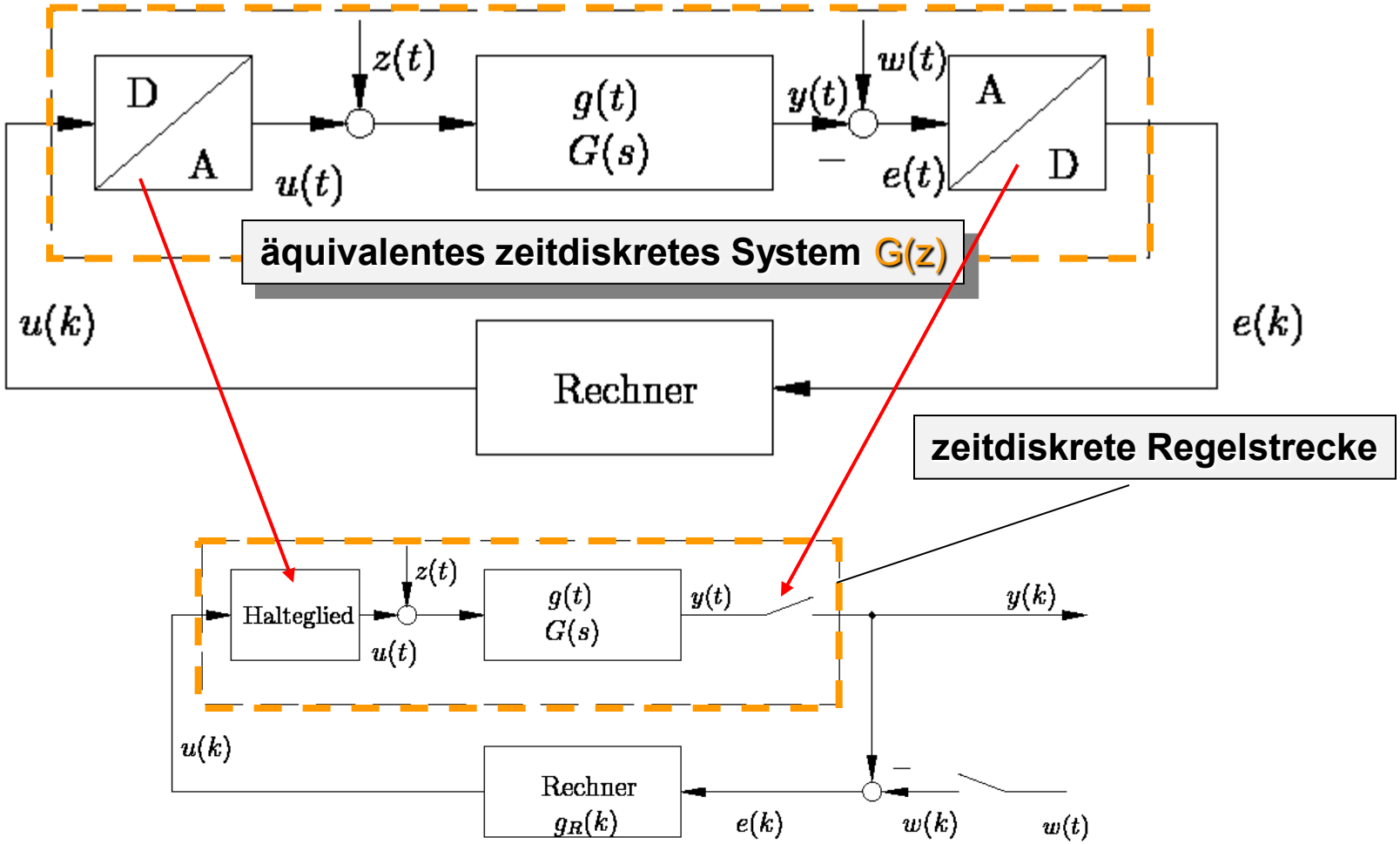
Digital-Analog-Umsetzer

Analog-Digital-Umsetzer

zeitdiskrete Signale

z-Üfkt. von Abtastsystemen (2)

A/D- und D/A-Umsetzer werden mit der Regelstrecke zusammengefaßt:

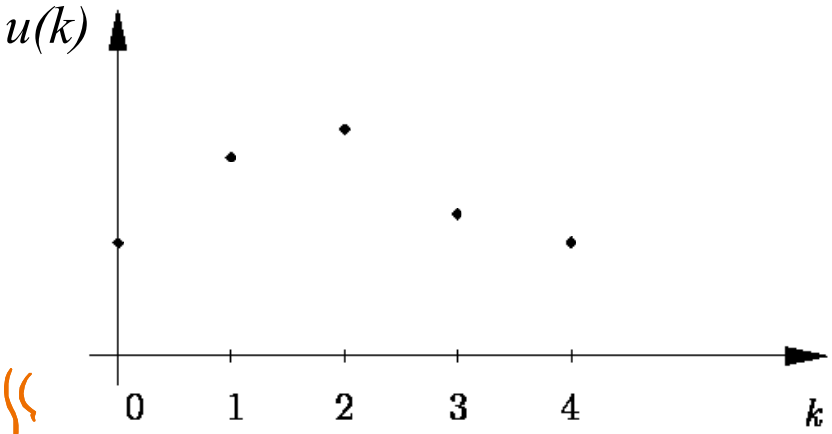


Halteglied 0-ter Ordnung

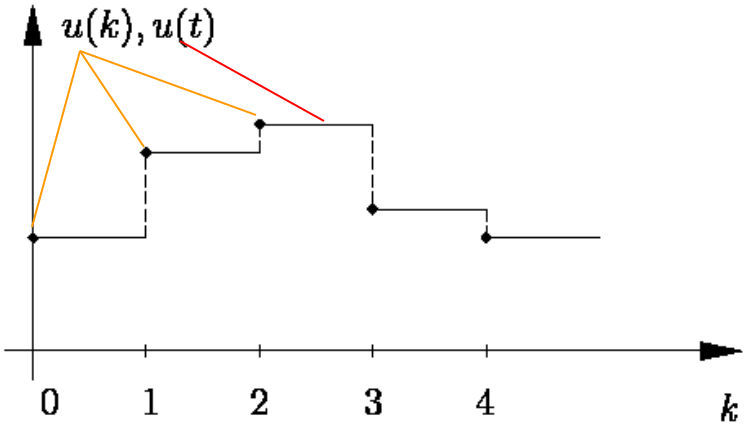
Aufgabe:

Das Halteglied setzt eine Zahlenfolge *u(0), u(1), u(2), ...* **in ein analoges Signal** *u(t)* **um, mit**

$$u(t) = u(k) = \text{const.}$$ **für** $$kT \le t < (k+1)T.$$

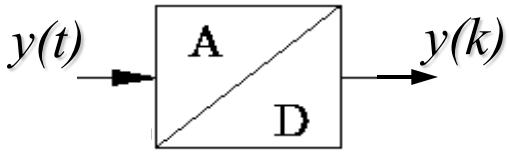


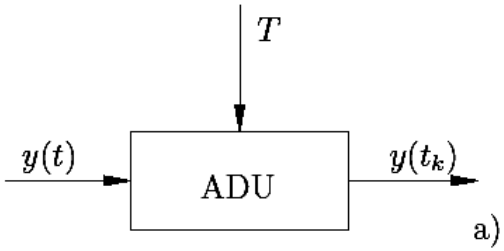
⇒

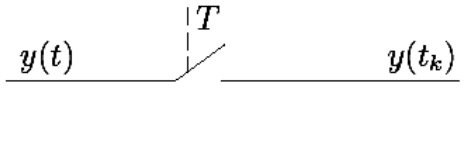


z-Üfkt. von Abtastsystemen (3)

A/D-Umsetzer als idealer Abtaster



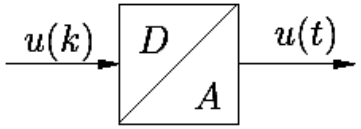


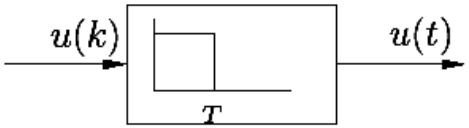


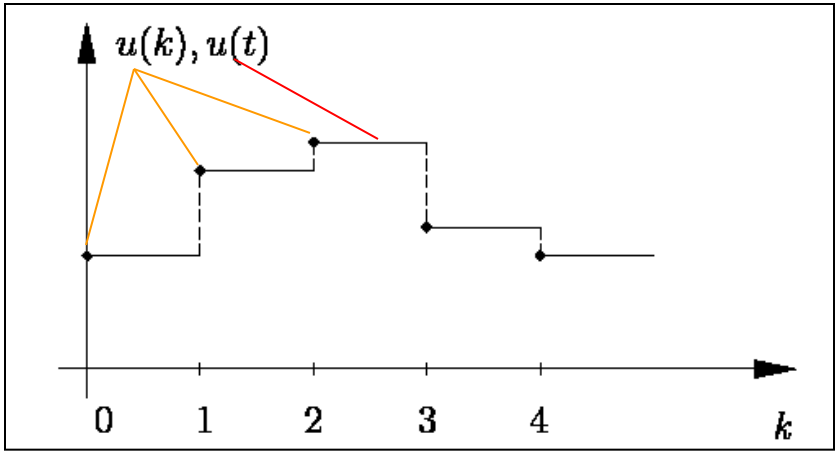
analoges Signal

Zahlenfolge

D/A-Umsetzer als Halteglied 0-ter Ordnung





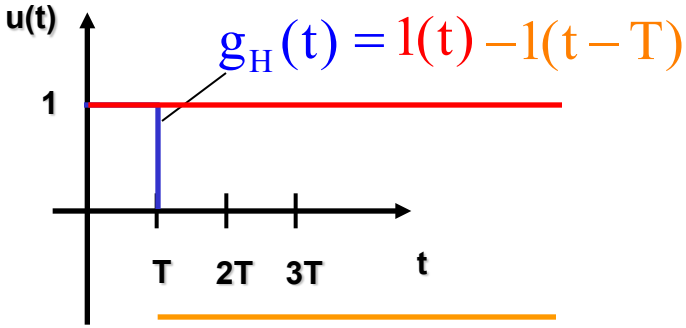


z-Üfkt. von Abtastsystemen (4)

Übertragungsverhalten der zeitdiskreten Regelstrecke ?

Zunächst Übertragungsverhalten des Haltegliedes 0-ter Ordnung ?

Das Halteglied 0-ter Ordnung soll für einen Dirac'schen Deltaimpuls $\delta(t)$ einen Puls der Breite T und der Höhe 1 liefern.



$$\mathcal{L}\{g_H(t)\} = G_H(s) = H(s)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-sT} \qquad \boxed{= \frac{1 - e^{-sT}}{s}}$$

z-Üfkt. von Abtastsystemen (5)

Gewichtsfunktion der Reihenschaltung von Halteglied und Regelstrecke

$$g_{HG}(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\cdot G(s)\}$$

Gewichtsfolge durch ideale Abtastung:

$$g_{HG}(kT) = \mathfrak{L}^{-1}\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\cdot G(s)\}\,|_{t=kT}$$

Ideale Abtastung

z-Transformierte der Gewichtsfolge:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g_{HG}(kT)\} \quad = \mathcal{Z}\left\{\mathfrak{L}^{-1}\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\cdot G(s)\}\,|_{t=kT}\right\}$$

$$= \mathcal{Z}\left\{\mathfrak{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)}{s}\cdot e^{-Ts}\}\,|_{t=kT}\right\}$$

z-Üfkt. von Abtastsystemen (6)

z-Transformierte der Gewichtsfolge:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{ \underbrace{\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\Big|_{t=kT}}_{\text{Übergangsfunktion } h(t) \text{ der Regelstrecke}} - \underbrace{\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\cdot e^{-Ts}\right\}\Big|_{t=kT}}_{\text{Übergangsfunktion } h(t-T) \text{ der Regelstrecke}} \right\}$$

Übergangsfolge h(kT)

Übergangsfolge h(kT-T)

$$h(kT) = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\Big|_{t=kT} \qquad h(kT-T) = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\cdot e^{-Ts}\right\}\Big|_{t=kT}$$

$$\boxed{G(z) = \mathcal{Z}\left\{h(kT) - h(kT-T)\right\}}$$

z-Üfkt. der Reihenschaltung von Halteglied und Regelstrecke

Anwendung des Rechtsverschiebungssatzes auf

$$f(k-i) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-i}F(z)$$

$$G(z) = \mathcal{Z}\{h(kT) - h(kT-T)\}$$

liefert

$$G(z) = \mathcal{Z}\{h(kT)\} - z^{-1}\mathcal{Z}\{h(kT)\}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\{h(kT)\}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\{h(kT)\}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\}|_{t=kT}\}$$

Beispiel: äquivalente z-Übertragungsfunktion

Gegeben ist die DGL der kontinuierlichen Regelstrecke

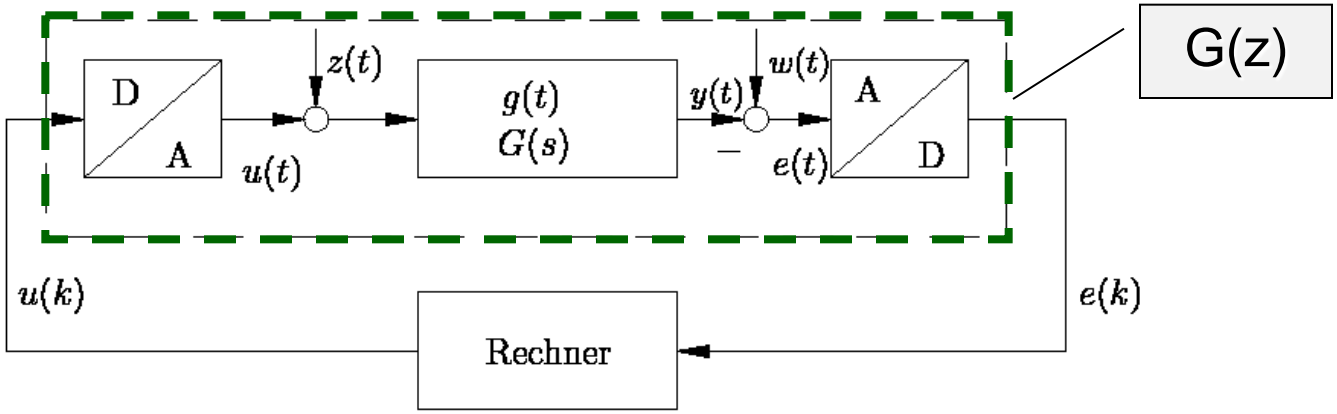
$$T_1\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Anwendung des Differentiationssatzes der Laplace-Transformation:

$$T_1 s Y(s) + Y(s) = U(s)$$

$$Y(s)(T_1 s + 1) = U(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boxed{\frac{1}{1 + T_1 s}}$$

Gesucht ist das äquivalente zeitdiskrete System G(z) ?



Beispiel: äquivalente z-Übertragungsfunktion (2)

Für Halteglied 0-ter Ordnung und ideale Abtastung erhält man:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\{h(kT)\}$$

Übergangsfolge der Regelstrecke

Gesucht ist zunächst die kontinuierliche Sprungantwort ?

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{1+T_1 s} \cdot \frac{1}{s} = \boxed{\frac{1}{s(1+T_1 s)}}$$

Sprungantwort im Zeitbereich mit Hilfe der Korrespondenz 6 in SRT-Tabelle A.2:

6	$\left(1-e^{-t/T}\right) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s(1+sT)}$

$$\Rightarrow \quad h(t) = y(t) = \boxed{1-e^{-t/T_1}} \quad \Rightarrow \quad h(kT) = h(t)\big|_{t=kT} = \boxed{1-e^{-kT/T_1}}$$

Beispiel: äquivalente z-Übertragungsfunktion (3)

$$\mathcal{Z}\{h(kT)\} = \mathcal{Z}\{1 - e^{-kT/T_1}\} = \underbrace{\mathcal{Z}\{1(kT)\}} - \underbrace{\mathcal{Z}\{e^{-kT/T_1}\}}$$

Korrespondenz 2
Tabelle 3.3

$$= \frac{\cancel{z}}{\cancel{z-1}} - \frac{\cancel{z}}{z - e^{-T/T_1}}$$

Korrespondenz 5
Tabelle 3.3

$$\mathcal{Z}\{e^{-a\cdot kT}\} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}} \cdot \mathcal{Z}\{h(kT)\}} = 1 - \frac{z-1}{z - e^{-T/T_1}}$$

$$= \frac{\cancel{z} - e^{-T/T_1} - (\cancel{z} - 1)}{z - e^{-T/T_1}}$$

$$\boxed{= \frac{1 - e^{-T/T_1}}{z - e^{-T/T_1}}}$$

Beispiel: äquivalente z-Übertragungsfunktion (4)

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} - e^{-T/T_1} z^{-1}}{1 - e^{-T/T_1} z^{-1}}$$

$$Y(z) - e^{-T/T_1} z^{-1} Y(z) = z^{-1}(1 - e^{-T/T_1}) U(z)$$

Differenzengleichung durch Anwendung des Rechtsverschiebungssatzes:

$$f(k-i) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-i} F(z)$$

$$y(k) - e^{-T/T_1} y(k-1) = (1 - e^{-T/T_1}) u(k-1)$$

Für $T = T_1 = 1$ ergibt sich:

$$y(k) - 0{,}368 \cdot y(k-1) = 0{,}632 \cdot u(k-1)$$

Beispiel: äquivalente z-Übertragungsfunktion (5)

$$y(k) = 0{,}368 \cdot y(k-1) + 0{,}632 \cdot u(k-1)$$

Gesucht die Antwort auf u(k) = 1(k), (y(k) = 0 für k < 0)

$k = 0:$

$$y(0) = 0{,}368 \cdot \cancelto{0}{y(-1)} + 0{,}632 \cdot \cancelto{0}{u(-1)} \quad \boxed{= 0}$$

$k = 1:$

$$y(1) = 0{,}368 \cdot \cancelto{0}{y(0)} + 0{,}632 \cdot u(0) \quad \boxed{= 0{,}632}$$

$k = 2:$

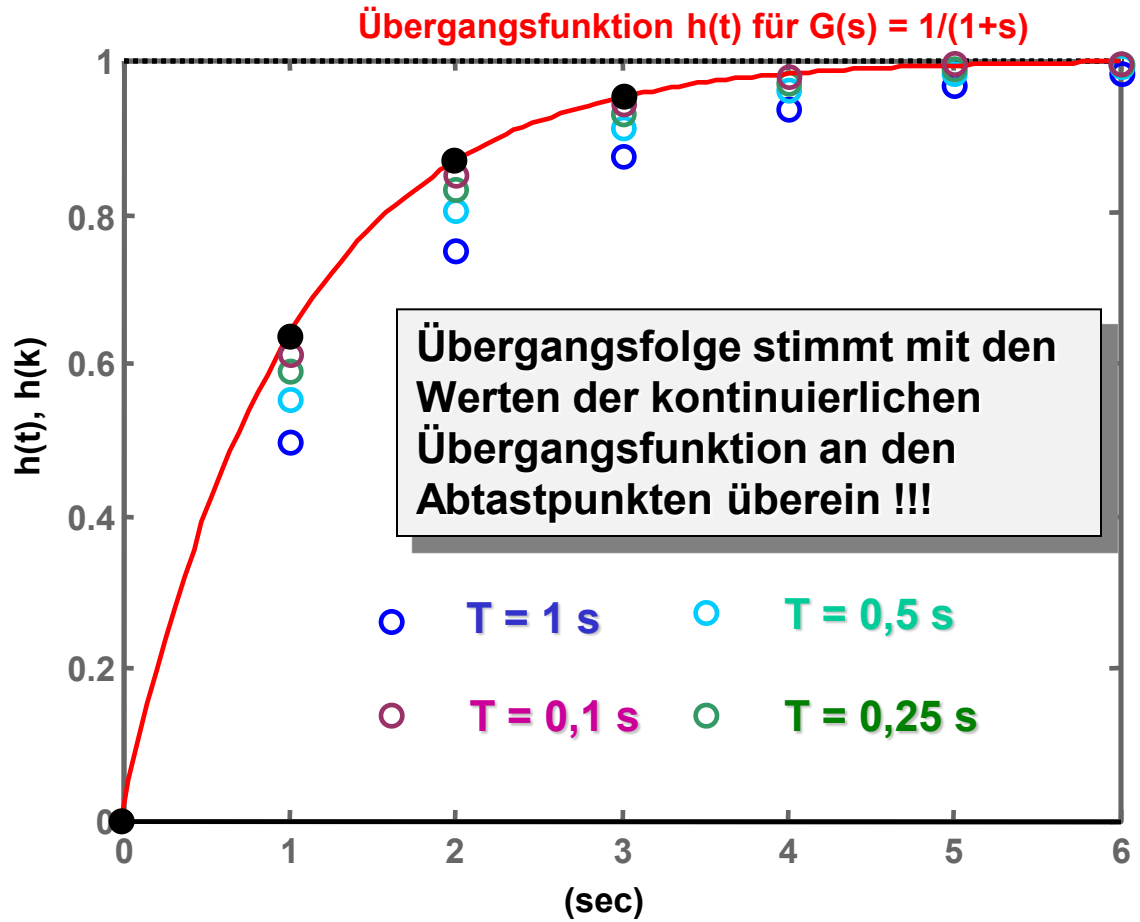
$$y(2) = 0{,}368 \cdot y(1) + 0{,}632 \cdot u(1)$$

$$= 0{,}368 \cdot 0{,}632 + 0{,}632 \quad \boxed{= 0{,}865}$$

$k = 3:$

$$y(3) = 0{,}368 \cdot y(2) + 0{,}632 \cdot u(2)$$

$$= 0{,}368 \cdot 0{,}865 + 0{,}632 \quad \boxed{= 0{,}950}$$



Beispiel: äquivalente z-Übertragungsfunktion (6)

$$y(k) = 0{,}368 \cdot y(k-1) + 0{,}632 \cdot u(k-1)$$

Gesucht die Antwort auf u(k) = k•1(k), (y(k) = 0 für k < 0)

$k = 0:$

$$y(0) = 0{,}368 \cdot \cancelto{0}{y(-1)} + 0{,}632 \cdot \cancelto{0}{u(-1)} \quad \boxed{= 0}$$

$k = 1:$

$$y(1) = 0{,}368 \cdot \cancelto{0}{y(0)} + 0{,}632 \cdot \cancelto{0}{u(0)} \quad \boxed{= 0}$$

$k = 2:$

$$y(2) = 0{,}368 \cdot \cancelto{0}{y(1)} + 0{,}632 \cdot u(1) \quad \boxed{= 0{,}632}$$

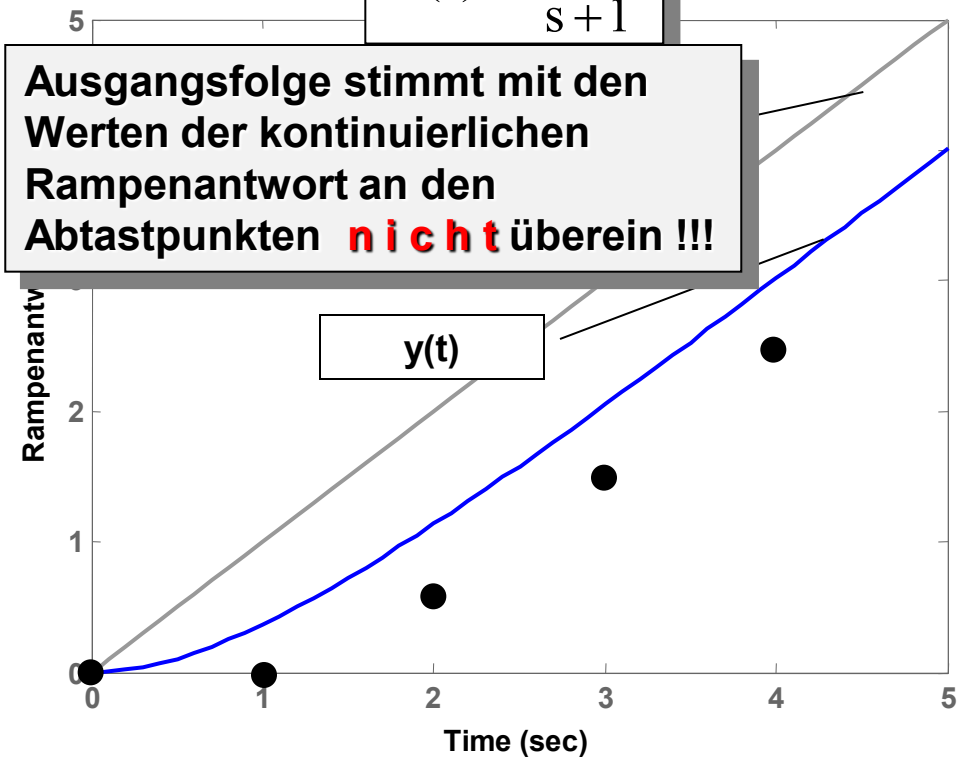
$k = 3:$

$$y(3) = 0{,}368 \cdot y(2) + 0{,}632 \cdot u(2)$$

$$= 0{,}368 \cdot 0{,}632 + 0{,}632 \cdot 2 \quad \boxed{= 1{,}497}$$

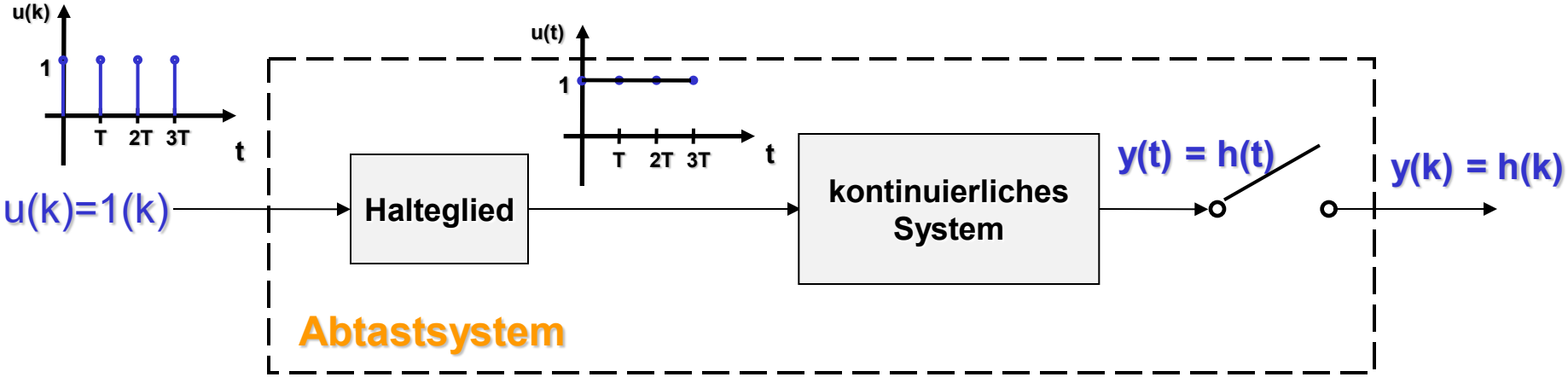
$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Ausgangsfolge stimmt mit den Werten der kontinuierlichen Rampenantwort an den Abtastpunkten n i c h t überein !!!

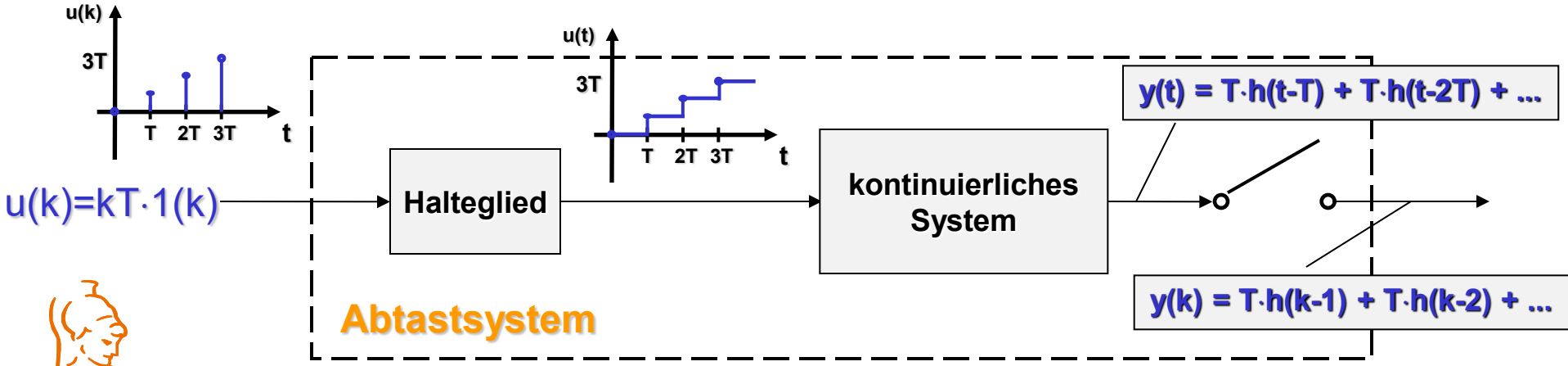


Beispiel: äquivalente z-Übertragungsfunktion (7)

Sprungantwort

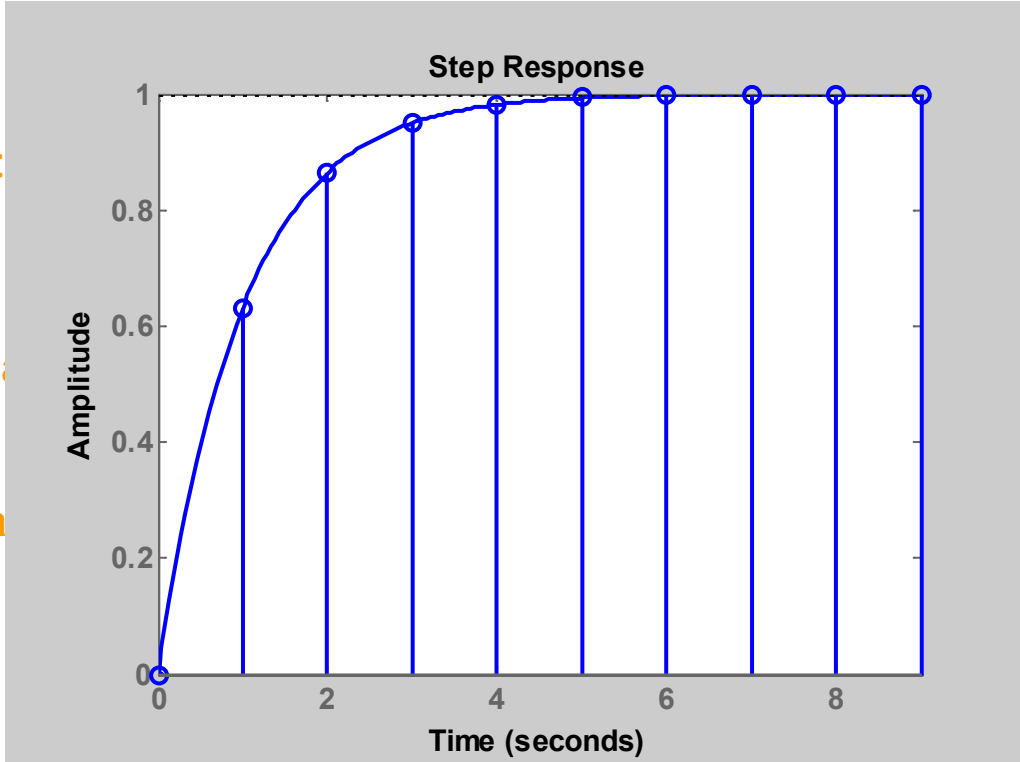


Rampenantwort



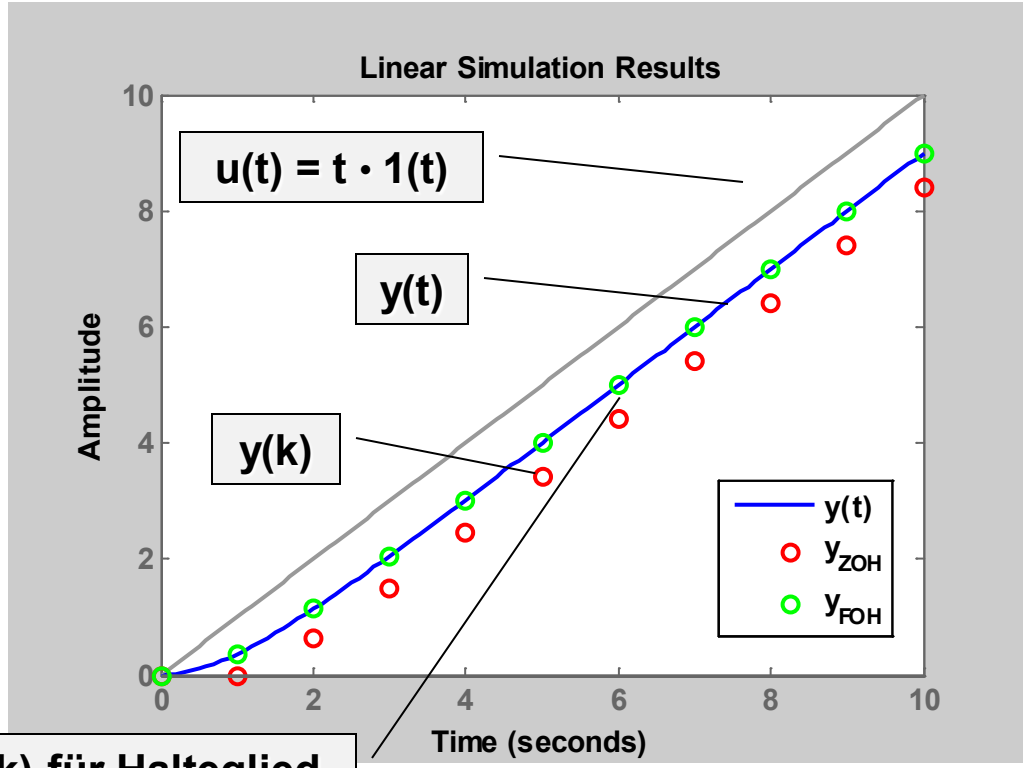
Matlab-Beispiel: z-Übertragungsfunktion

```
%
% z-Uebertragungsfunktion der kontinuierlichen Übertragungsfunktion
%                                  1
%                       G(s)  = -------
%                                  s + 1
s = tf('s')
%
G_s = 1/(s+1)
%
T = 1  % Abtastintervall
%
G_z = c2d(G_s,T) % Conversion of cont
%
figure(1)
%
step(G_s)       % kontinuierliche Sprung
hold on

[y,t] = step(G_z,10)  % diskrete Sprunga
stem(t,y)
```



Matlab-Beispiel: z-Übertragungsfunktion (2)

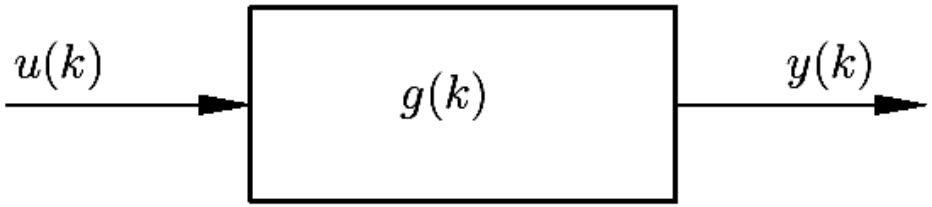
```
t = 0:0.1:10;
u = t;

% kontinuierliche Rampenantwort
lsim(G_s,u,t)

%
hold on
t = 0:1:10;
u = t;

% diskrete Rampenantwort
[y1,t] = lsim(G_z,u,t)
stem(t,y1,'r','LineStyle','none')

% diskrete Rampenantwort mit Halteglied 1. Ordnung

[y2,t] = lsim(c2d(G_s,T,'foh'),u,t)
stem(t,y2,'g','LineStyle','none')
legend('y(t)','y_{ZOH}','y_{FOH}'
```



y(k) für Halteglied 1. Ordnung

Stabilität zeitdiskreter Systeme

Betrachtet werden lineare, zeitdiskrete Systeme:



Definition 4.1

- Ein autonomes zeitdiskretes System ist asymptotisch stabil, wenn es nach Auslenkung aus der Ruhelage selbsttätig dorthin zurückkehrt.
- Ein zeitdiskretes dynamisches System ist Ein–/Ausgangs–stabil (BIBO–stabil), wenn für beschränkte Eingangssignale $u(k)$ für alle t_k das Ausgangssignal $y(k)$ beschränkt ist:

$$|u(k)| \leq N < \infty \Rightarrow |y(k)| \leq M < \infty \,, \; \forall\, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

Stabilität zeitdiskreter Systeme (2)

Auch bei zeitdiskreten Übertragungssystemen muß nicht zwischen asymptotischer und BIBO-Stabilität unterscheiden werden !

Aus Berechnung der Ausgangsfolge mit Hilfe der Faltungssumme

$$|y(k)| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |g(k-\nu)||u(\nu)| < \infty$$

folgt:

Satz 4.1

Ein lineares zeitinvariantes zeitdiskretes System mit der Gewichtsfolge $g(k)$ ist dann und nur dann stabil, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < \infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{k\to\infty} |g(k)| = 0} \tag{4.3}$$

gilt.

Stabilität zeitdiskreter Systeme (3)

Stabilitätsbedingung im z-Bereich

Satz 4.2

Ein lineares zeitinvariantes zeitdiskretes System mit der Übertragungsfunktion $G(z)$ ist dann und nur dann stabil, wenn alle Pole von $G(z)$ innerhalb des Einheitskreises der z–Ebene liegen, d.h. wenn gilt

$$|z_i| < 1 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad . \tag{4.4}$$

Folgt unmittelbar aus der Abbildung $z = e^{sT}$

Ein stabiles, kontinuierliches System kann durch Abtastung nicht instabil werden.

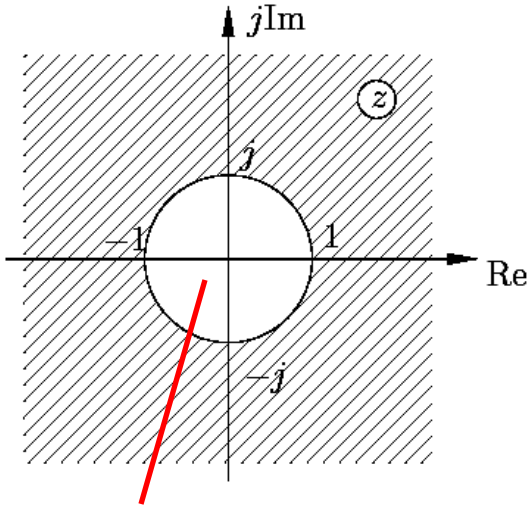


Bild 4.2: Stabilitätsgebiet in der z–Ebene

Eine aufklingende Schwingung eines kontinuierlichen Systems kann allerdings so abgetastet werden, daß die Schwingung in der Abtastfolge nicht sichtbar ist !!!

Stabilität zeitdiskreter Systeme (4)

Pole kontinuierlicher und zeitdiskreter Systeme

Aus

$$z = e^{sT} \quad \textbf{mit} \quad s = \sigma + j\omega$$

folgt

$$|z| = |e^{(\sigma + j\omega)T}| = |e^{\sigma T}| \cdot |e^{j\omega T}| \boxed{= e^{\sigma T}}$$

$$|e^{j\omega T}| = |\cos\omega T + j\sin\omega T|$$
$$= \sqrt{\cos(\omega T)^2 + \sin(\omega T)^2}$$
$$= 1$$

und

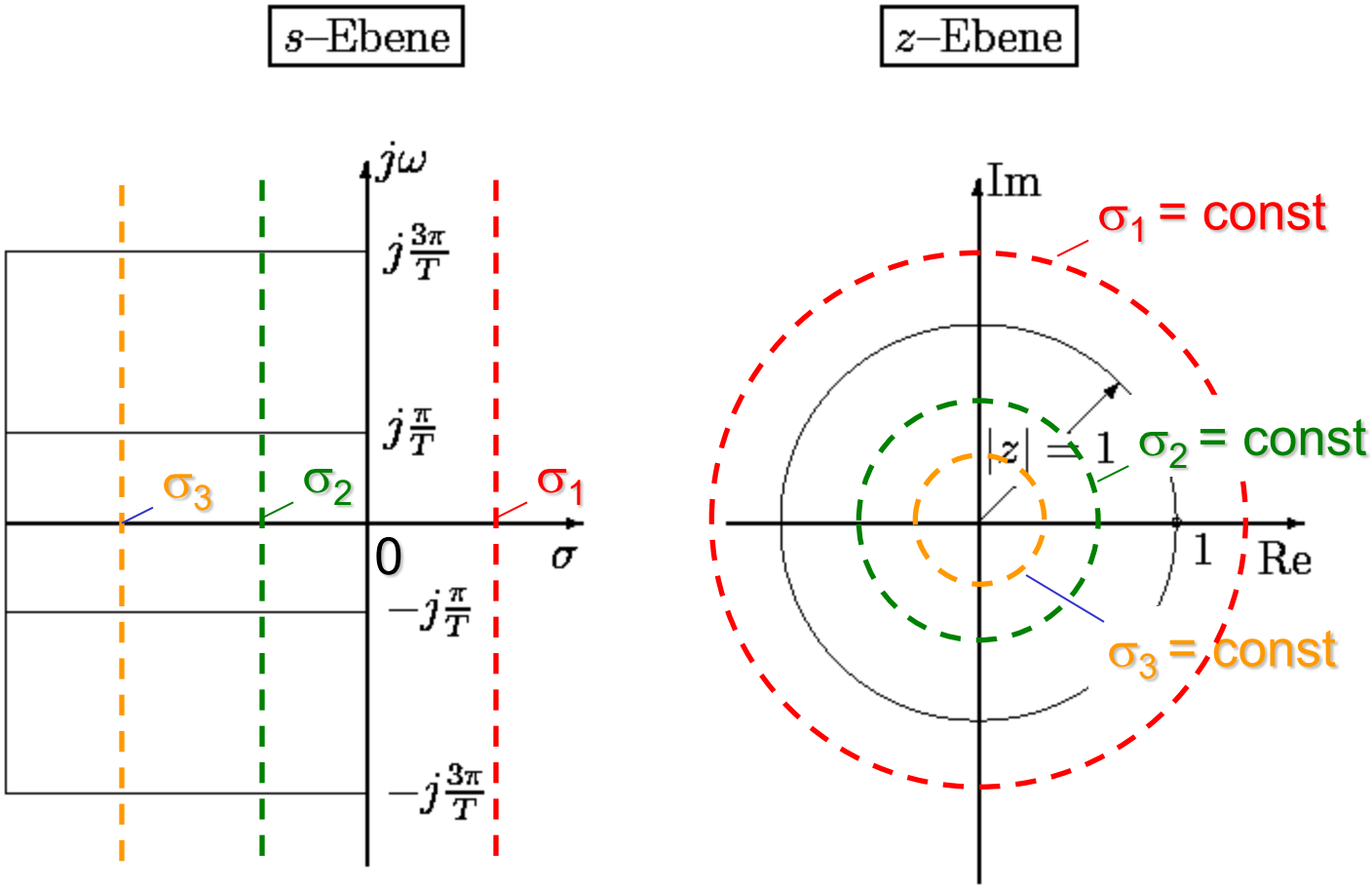
$$\boxed{\arg z = \varphi = \omega T}$$

- **Für eine konstantes Abtastintervall T hängt der Betrag von z nur vom Realteil σ ab.**
- **Das Argument von z wird nur von ω bestimmt.**

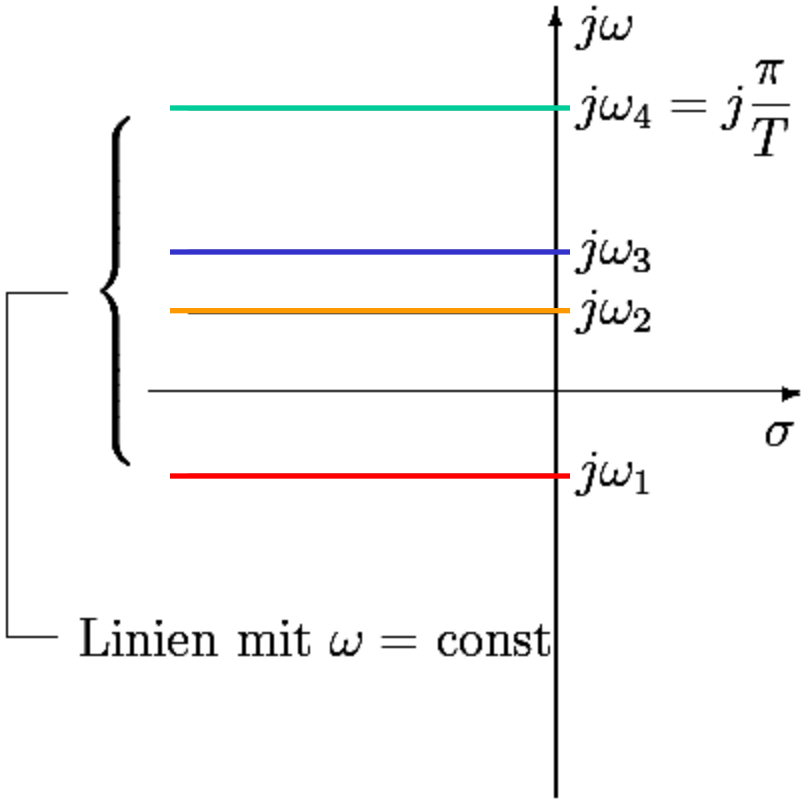
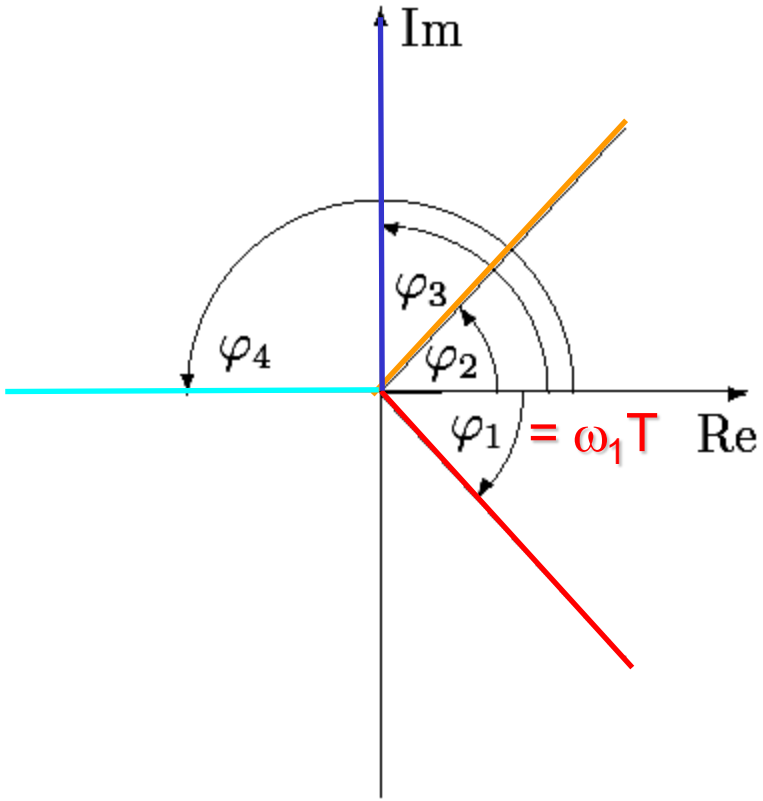
Stabilität zeitdiskreter Systeme (5)

Linien mit σ = const (absolute Stabilitätsreserve)

Kreise mit dem Radius $e^{\sigma T}$



Stabilität zeitdiskreter Systeme (6)

Linien mit ω = const

Geraden mit Winkel ωT