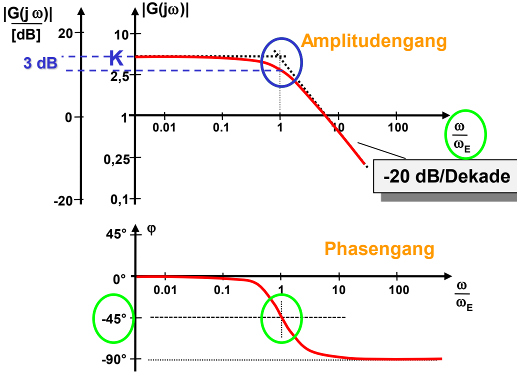
# Frequenzgang $PT_1$-System (2)

**Kenngrößen:**

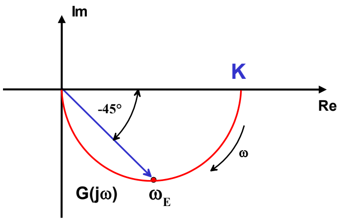
Verstärkung $K$

Eckfrequenz $\omega_E = 1/T_1$

3 dB-Abfall bei $\omega_E$ (Bandbreite).




**Bode-Diagramm**




**Ortskurve**

**Ein $PT_1$-System zeigt Tiefpassverhalten**

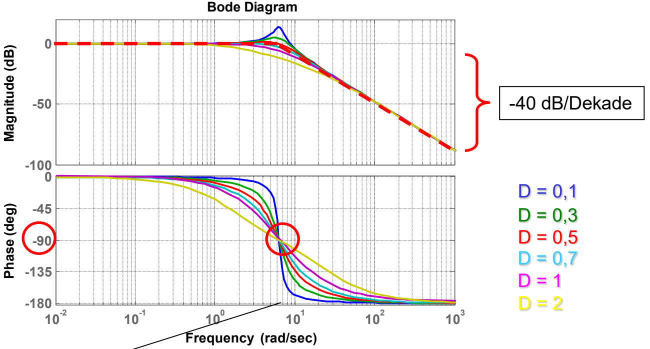
# Frequenzgang $PT_2$-System (komplexe Pole)

**Frequenzgang:**

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{2D}{\omega_0}\omega - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2jD\omega_0\omega}$$

**Bodediagramm:**

$K = 1$




$\omega_0 = 2\pi$

# Eigenschaften diskreter Systeme (6)

**Aus**

$$T_1\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \qquad \Rightarrow \qquad T_1\frac{y(k)-y(k-1)}{T} + y(k) = u(k)$$

**Beide Seiten mit T multiplizieren:**

$$T_1(y(k)-y(k-1)) + Ty(k) = Tu(k)$$

$$(T_1+T)y(k) - T_1y(k-1) = Tu(k)$$

**Auflösen nach y(k):**

$$y(k) = \frac{1}{T_1+T}(T_1y(k-1)+Tu(k))$$

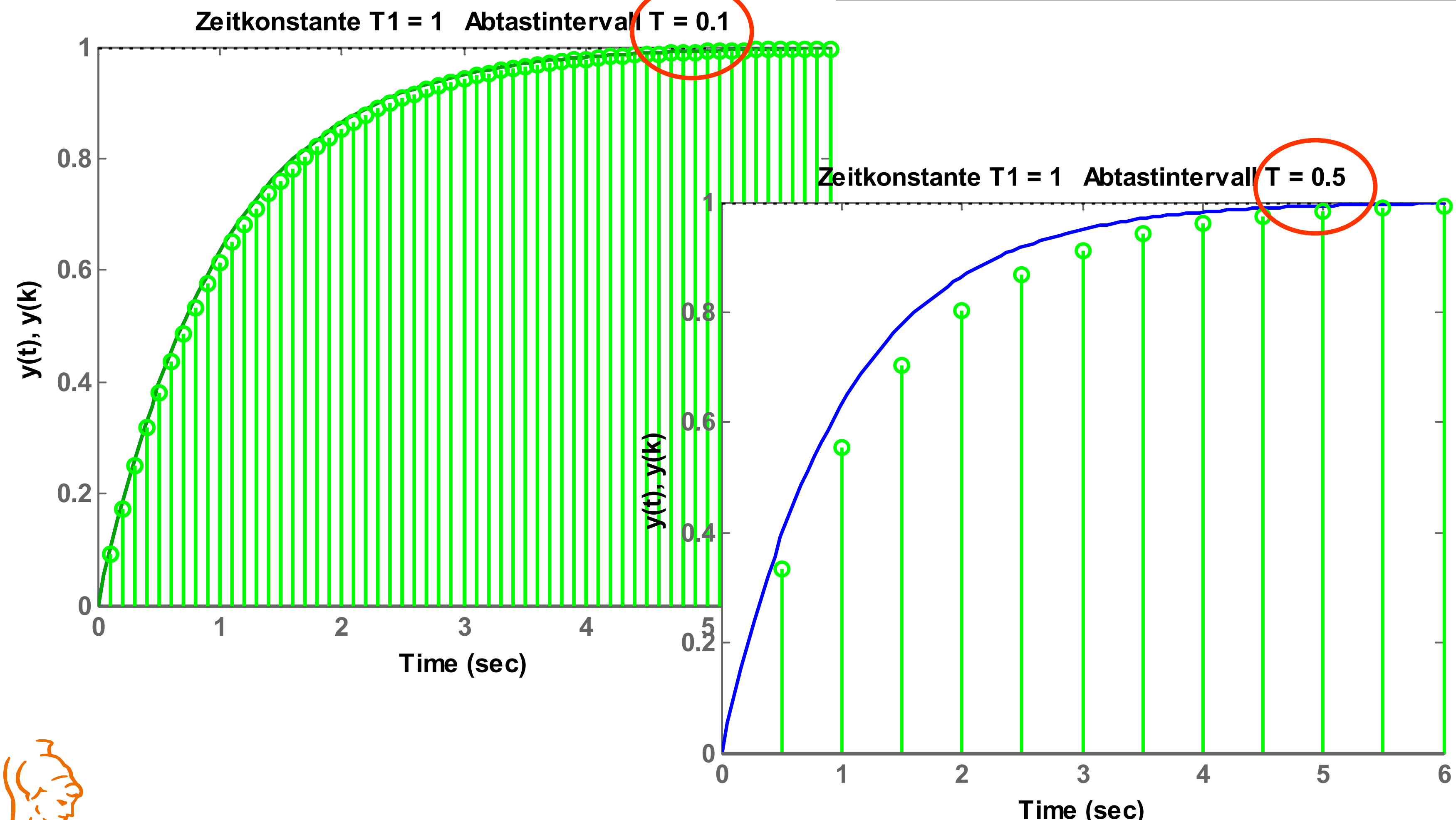
$$= \frac{T_1}{T_1+T}y(k-1) + \frac{T}{T_1+T}u(k)$$

$$= -a_1y(k-1) + b_0u(k)$$

# Eigenschaften diskreter Systeme (9)

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

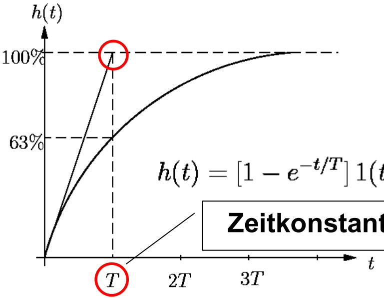
$$y(k) = \frac{T_1}{T_1 + T} y(k-1) + \frac{T}{T_1 + T} u(k)$$



# Beispiel: Pneumatischer Speicher (3)

## PT$_1$-System

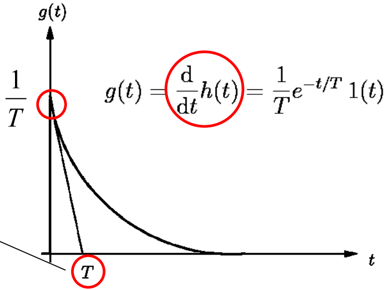
$$T\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$




$$h(t) = [1 - e^{-t/T}]\, 1(t)$$

**Zeitkonstante**

**Sprungantwort**




$$g(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}\, 1(t)$$

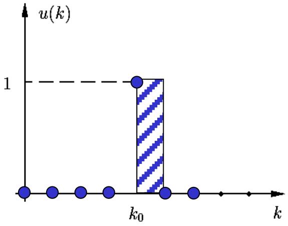
**Gewichtsfunktion**

# Elementare diskrete Signale

a) **Einheitsimpuls oder Impulsfolge**

Der **Einheitsimpuls** (Bild 2.12a)

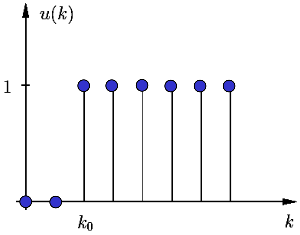
$$\delta(k-k_0) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k = k_0 \\ 0 & \text{für} \quad k \neq k_0 \end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots$$



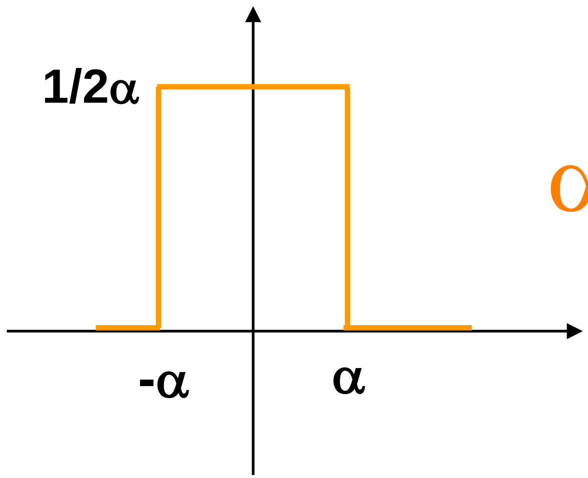

b) **Einheitssprung oder Sprungfolge**

Der **Einheitssprung** (Bild 2.12b)

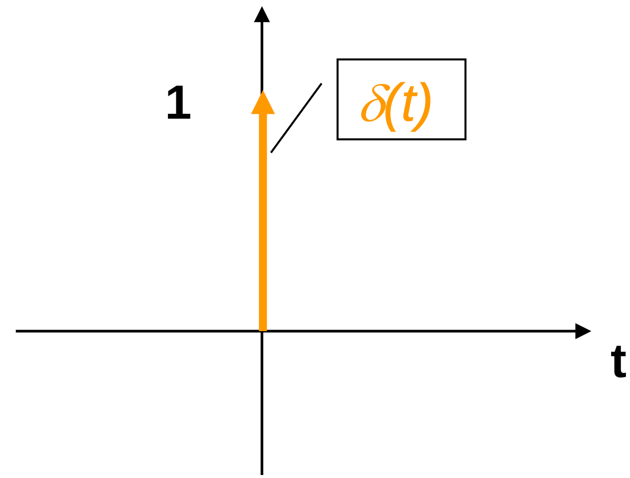
$$1(k-k_0) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k \geq k_0 \\ 0 & \text{für} \quad k < k_0 \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$



# Dirac‘sche Deltafunktion




$$\alpha \to 0$$




**Die Deltafunktion ist eine Distribution oder verallgemeinerte Funktion**

$\Rightarrow$ **Ein von Null verschiedener Funktionswert ergibt sich nicht durch Einsetzen eines Argumentes, sondern durch eine Rechenvorschrift.**

**Ausblendeigenschaft**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

| Nr. | | Zeitfunktion | Transformierte | Voraussetzungen |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Definition | $f(t)\cdot 1(t) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\cdot e^{st}\mathrm{d}s$ | $F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}\mathrm{d}t$ | $c \geq \sigma_0$ [1] |
| 2 | Linearität | $k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$ | $k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)$ | $k_1, k_2 = \text{const.}$ |
| 3 | Rechts-verschie-bungssatz | $f(t-a)\cdot 1(t-a)$ | $e^{-as}\cdot F(s)$ | $a > 0$, reell |
| 4 | Ähnlich-keitssatz | $f(at)$ | $\frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$ | $a > 0$, reell |
| 5 | Dämpfungs-satz | $e^{-at}\cdot f(t)$ | $F(s+a)$ | $a$ beliebig |
| 6 | Differentia-tionssatz | $f^{(n)}(t)$ | $s^n\cdot F(s) - \sum\limits_{i=0}^{n-1} s^i\cdot f^{(n-1-i)}(+0)$ | $f(t)$ sei $(n-1)$–mal stetig differenzierbar |
| 7 | Integra-tionssatz | $\int\limits_0^t \int\limits_0^{\tau_{n-1}} \cdots \int\limits_0^{\tau_1} f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_{n-1}$ | $\frac{1}{s^n}\cdot F(s)$ | – |
| 8 | Faltungs-satz | $\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ | $F_1(s)\cdot F_2(s)$ | Re $s > \max.\sigma_{0_i}$ $i = 1, 2$ |
| 9 | Grenzwert-sätze | Anfangswertsatz: $\lim\limits_{t\to+0} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s\cdot F(s)$ Endwertsatz: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} s\cdot F(s)$ | | Existenz der Grenzwerte |

**Tabelle A.1**: **Definition, Eigenschaften der Laplace–Transformation**

Mit Hilfe einiger weniger dieser Eigenschaften lassen sich gewöhnliche lineare, zeitinvariante Differentialgleichungen in geschlossener Form *algebraisieren*, d. h. die die Dynamik eines Systems beschreibenden Differentialgleichungen werden damit in einfacher und geschlossener Form in sogenannte **Übertragungsfunktionen** überführt. Im folgenden werden einige dieser wichtigen Eigenschaften abgeleitet:

[3] Konvergenzabzsisse

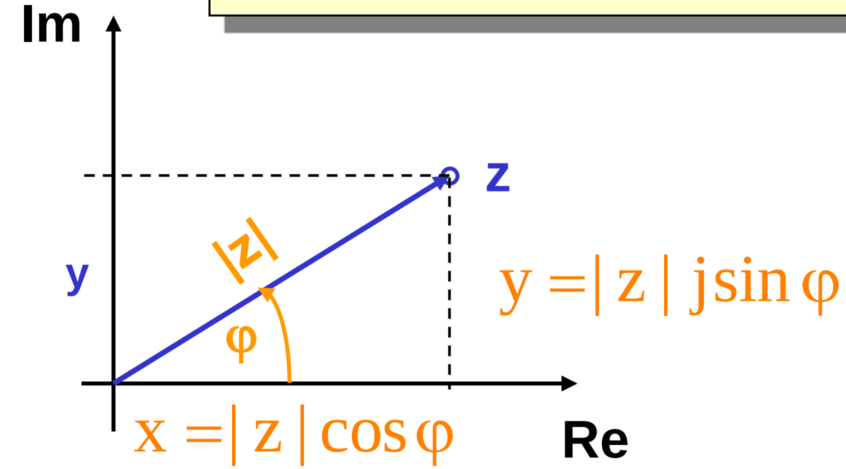
# Komplexe Zahlen

## Kartesische Koordinaten

$$z = x + jy$$

**Darstellung als Zeiger (Vektor) in der komplexen Zahlenebene (Gaußschen Zahlenebene).**

## Gaußsche Zahlenebene




## Polarkoordinaten

$$z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

## Exponentialform

**Aus der Eulersche Identität**

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi}$$

**folgt** $z = |z|\,e^{j\varphi}$