Zusammenfassung der 2. Vorlesung

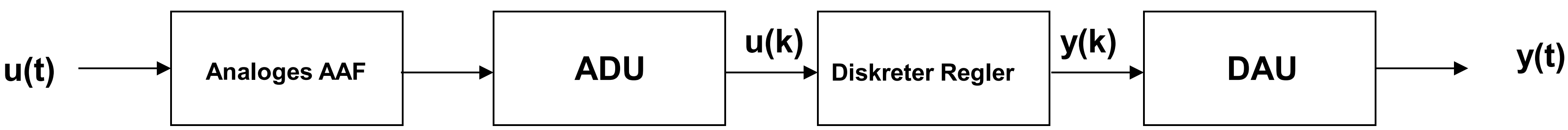
- **Fourier-Transformation versus Laplace-Transformation**
- **Spektrum kontinuierlicher Signale**
  - **Das Spektrum gibt an, welche Frequenzen in einem Signal vorkommen und welches Gewicht sie haben.**
- **Spektrum diskreter Signale**
  - **Das Spektrum eines zeitdiskreten Signals ist periodisch mit der Periode $\omega_A = 2\pi/T$ und mit $1/T$ gewichtet.**
- **Abtasttheorem von Shannon**
- **Ein kontinuierliches, bandbegrenztes Signal mit der Grenzkreis-frequenz ω_g ist eindeutig durch seine äquidistanten Abtastwerte bestimmt, wenn $\omega_A > 2\omega_g$ gilt.**

Zusammenfassung der 2. Vorlesung

Frequenzfaltung oder Aliasing

- **Frequenzfaltung:** Frequenzen mit $\omega > \omega_A/2$ werden durch den Abtastvorgang auf Frequenzen $\omega < \omega_A/2$ **gefaltet**.
- **Aliasing:** Durch die Abtastung entsteht ein **anderes** (alias lat. anders) Signal (Signal mit einer reduzierten Frequenz).

⇒ **Häufig ist ein Einsatz von Tiefpassfiltern (Anti-Aliasing-Filter) notwendig.**



Beschreibung von Systemen

Kontinuierliche Systeme

Beschreibung mittels Differentialgleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} u(t)$$

Beschreibung durch Über-gangsfunktion *h(t)* und Gewichtsfunktion *g(t)*

Zeitdiskrete Systeme

Beschreibung mittels Differenzengleichungen

$$y(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i\, y(k-i) = \sum_{j=0}^{n} b_j\, u(k-j)$$

Beschreibung durch Übergangsfolge *h(k)* und Gewichtsfolge *g(k)*

Beispiel: Sprungantwort

Gegeben ist die DGL eines PT_1-Systems

Abtastperiode

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Ersetzen der Differentiation durch Differenzenquotienten liefert:

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_0 u(k) \quad \textbf{mit} \quad a_1 = -\frac{T_1}{(T_1 + T)}, \quad b_0 = \frac{T}{(T_1 + T)}$$

Gesucht die Antwort auf u(k) = 1(k), (y(k) = 0 für k ≤ 0)

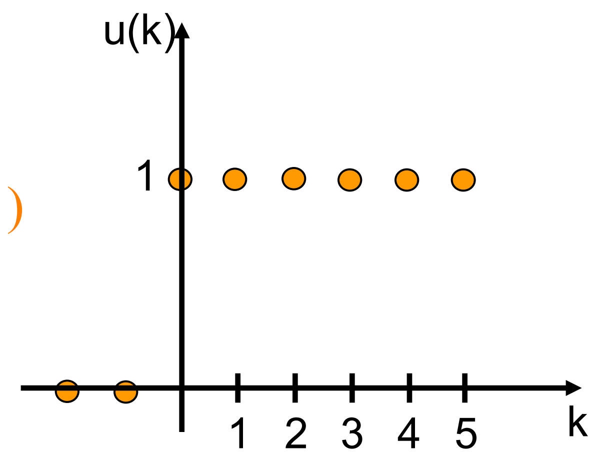
$$k = 0: \qquad y(0) = 0$$

$$k = 1: \quad y(1) = -\cancelto{0}{a_1 y(0)} + b_0 u(1) = b_0$$

$$k = 2: \quad y(2) = -a_1 y(1) + b_0 u(2) = b_0 - a_1 b_0 = b_0(1 - a_1)$$

$$k = 3: \quad y(3) = -a_1 y(2) + b_0 u(3) = b_0 - a_1 b_0 (1 - a_1)$$

$$= b_0 (1 - a_1 + a_1^2)$$



$$\Rightarrow \quad \boxed{y(k) = b_0 \sum_{i=1}^{k} (-a_1)^{i-1}}$$

Beispiel: Sprungantwort (2)

Übergangsfolge

$$h(k) = b_0 \sum_{i=1}^{k} (-a_1)^{i-1}$$

$$a_1 = -\frac{T_1}{T_1 + T}$$

$|a_1| < 1$ **für** $T > 0$

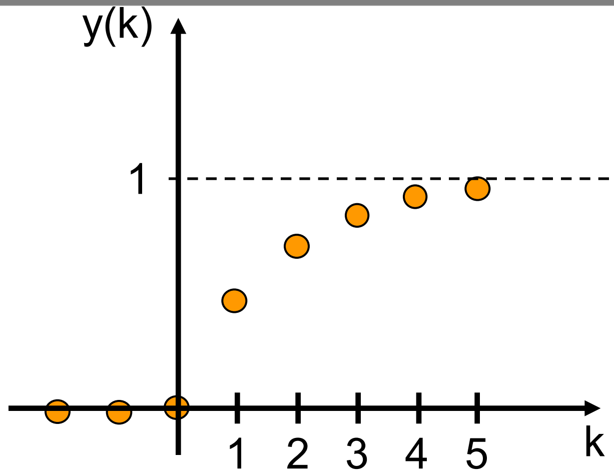
immer erfüllt !

konvergiert für $|a_1| < 1$.

Für $T_1 = T = 1$ erhält man $a_1 = -0{,}5$ und $b_0 = 0{,}5$ und es ergibt sich:

$$y(k) = h(k)$$

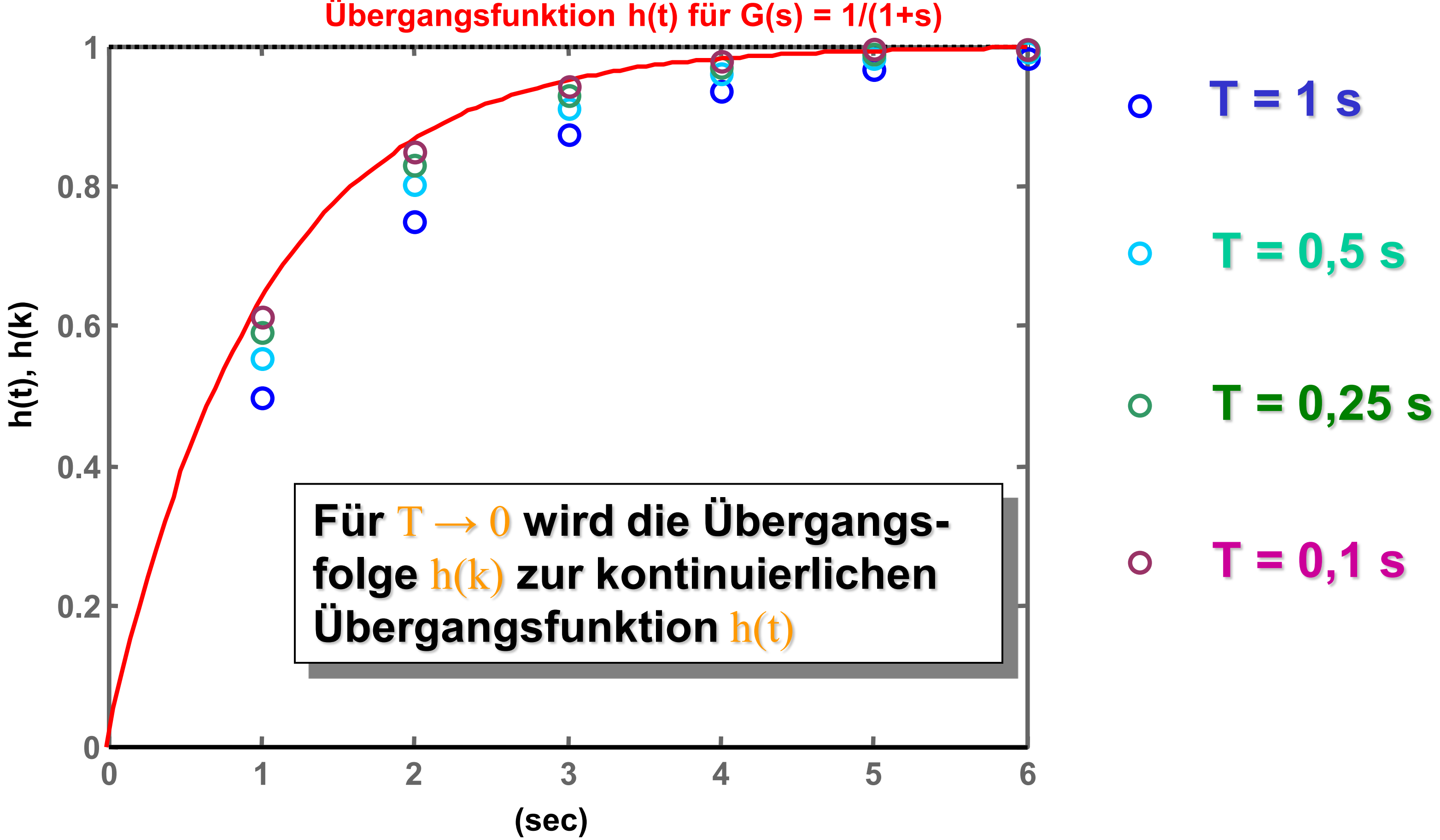
$$= \{0;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 0{,}875; \dots \}$$



Beispiel: Sprungantwort (3)

Übergangsfolgen für verschiedene Abtastperioden T

$$y(k) = 0{,}5 \cdot y(k-1) + 0{,}5 \cdot u(k-1) \text{ für } T = T_1 = 1$$



Für $T \to 0$ wird die Übergangsfolge $h(k)$ zur kontinuierlichen Übergangsfunktion $h(t)$

Gegeben ist die DGL eines PT_1-Systems

$$T_1\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Ersetzen der Differentiation durch Differenzenquotienten liefert:

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_0 u(k) \quad \textbf{mit} \quad a_1 = -\frac{T_1}{T_1 + T}, \quad b_0 = \frac{T}{T_1 + T}$$

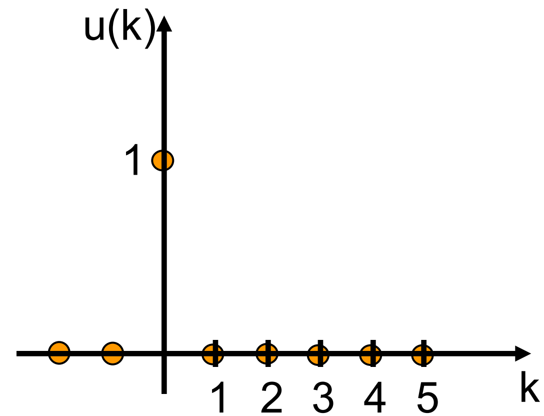
Abtastperiode

Gesucht die Antwort auf $u(k) = \delta(k)$, $(y(k) = 0$ für $k < 0)$

$$k = 0: \; y(0) = -a_1 \cancelto{0}{y(-1)} + b_0 u(0) = b_0$$

$$k = 1: \; y(1) = -a_1 y(0) + b_0 \cancelto{0}{u(1)} = -a_1 b_0$$

$$k = 2: \; y(2) = -a_1 y(1) + b_0 \cancelto{0}{u(2)} = a_1^2 b_0$$



$$\Rightarrow \quad \boxed{y(k) = (-1)^k a_1^k b_0}$$

Gewichtsfolge

$$g(k) = (-1)^k a_1^k b_0$$

$$a_1 = -\frac{T_1}{T_1 + T}$$

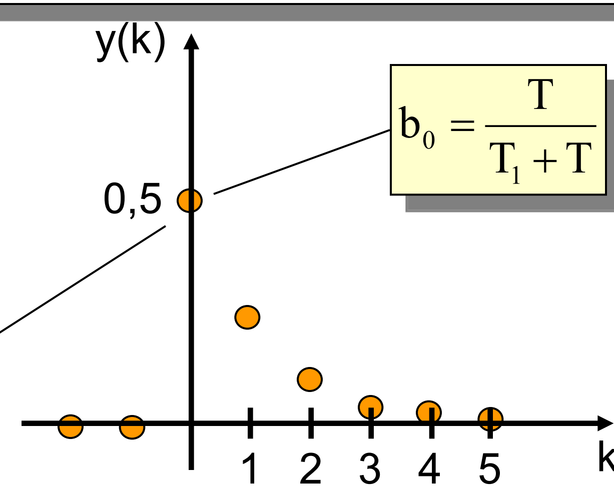
$|a_1| < 1$ **für** $T > 0$ **immer erfüllt !**

klingt für $|a_1| < 1$ ab.

Für $T_1 = T = 1$ erhält man $a_1 = -0{,}5$ und $b_0 = 0{,}5$ und es ergibt sich:

$$y(k) = g(k)$$

$$= \{0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125;\ 0{,}0625;\ \dots\}$$

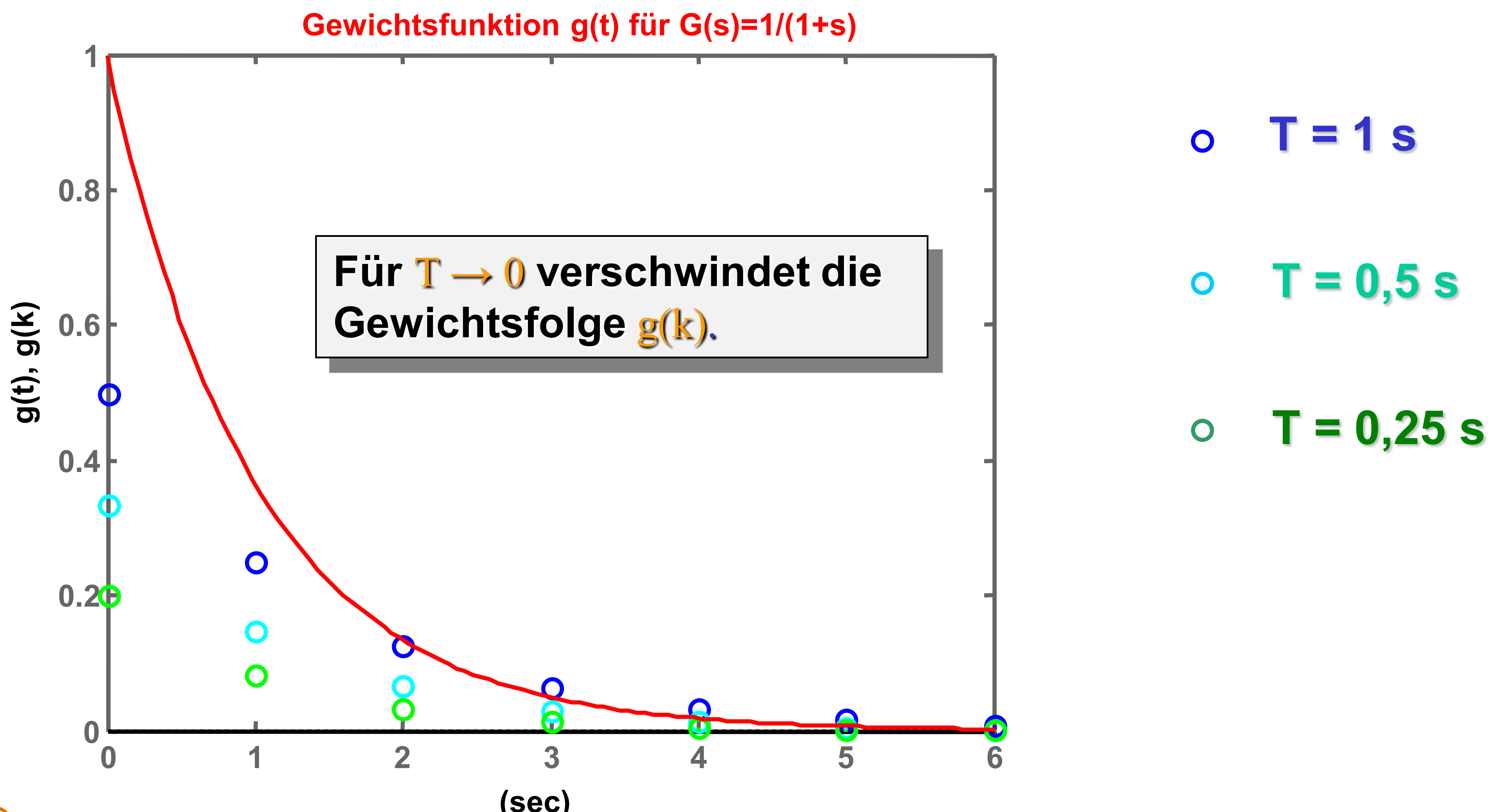


$$b_0 = \frac{T}{T_1 + T}$$

Anfangswert ist nicht nur von T_1, sondern auch von der Abtastperiode T abhängig !!!

Beispiel: Impulsantwort (3)

Gewichtsfolgen für verschiedene Abtastperioden T



Für $T \to 0$ verschwindet die Gewichtsfolge $g(k)$.

Zusammenhang Gewichts- und Übergangsfolge

Kontinuierliche Systeme

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t)$$

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

Zeitdiskrete Systeme

$$g(k) = h(k+1) - h(k)$$

$$h(k) = \sum_{i=1}^{k} g(i-1)$$

Beispiel:

$$h(k) = \{0;\ 0,5;\ 0,75;\ 0,875; \dots \}$$

$$\Rightarrow \quad g(0) = h(1) - h(0) = 0,5 - 0 = 0,5$$

$$g(1) = h(2) - h(1) = 0,75 - 0,5 = 0,25$$

$$g(2) = h(3) - h(2) = 0,875 - 0,75 = 0,125$$

Kontinuierliche Systeme

Beschreibung mittels Differentialgleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} u(t)$$

Beschreibung durch Übergangsfunktion *h(t)* und Gewichtsfunktion *g(t)*

Beschreibung durch Übertragungsfunktion *G(s)* und Frequenzgang *G(jω)*.

Zeitdiskrete Systeme

Beschreibung mittels Differenzengleichungen

$$y(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i \, y(k-i) = \sum_{j=0}^{n} b_j \, u(k-j)$$

Beschreibung durch Übergangsfolge *h(k)* und Gewichtsfolge *g(k)*

?

z-Transformation: Motivation

Bei der Anwendung der Laplace-Transformation auf zeitdiskrete Signale treten immer transzendente Funktionen auf !!!

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

Anwendung der Laplace-Transformation liefert:

$$F^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot e^{-kTs}$$

Anwendung des Verschiebungssatzes der Laplace-Transformation

$\Rightarrow$ **Eine vollständige Beschreibung mit rationalen Übertragungsfunktionen ist nicht möglich !!!!**

z-Transformation: Definition

Zur Vermeidung der transzendenten Funktionen wird die z-Transformation eingeführt:

$$z = e^{Ts}$$

Definition 3.1 z–Transformation

Die z–Transformation eines diskreten Signals $f(k)$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots$ ist als unendliche Potenzreihe in der komplexen Variablen z^{-1} erklärt. Die Koeffizienten dieser Reihe sind die Werte der Signalfolge:

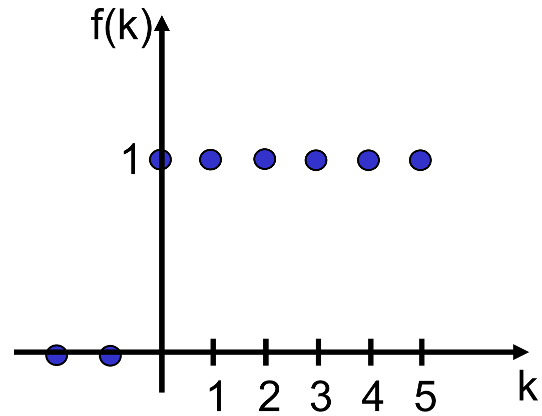
$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(kT)\} = \mathcal{Z}\{f(k)\} \tag{3.3}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \, . \tag{3.4}$$

z-Transformation: Beispiel Sprungfolge

$$f(k) = 1(k)$$

$$= \{1\ 1\ 1\ 1\ \cdots\}$$



Anwendung der z–Transformation liefert:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

Diese Reihe konvergiert für $|z| > 1$ zu dem Grenzwert

Bronstein, 1996, S. 390

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

- Die **z-Transformation** ist nur für Zahlenfolgen definiert.
- Durch die **z-Transformation** wird die **linke** komplexe **s-Halbebene** ins **Innere** des Einheitskreises abgebildet.

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega \cdot T}$$

Argument der komplexen Zahl z

Betrag der komplexen Zahl z

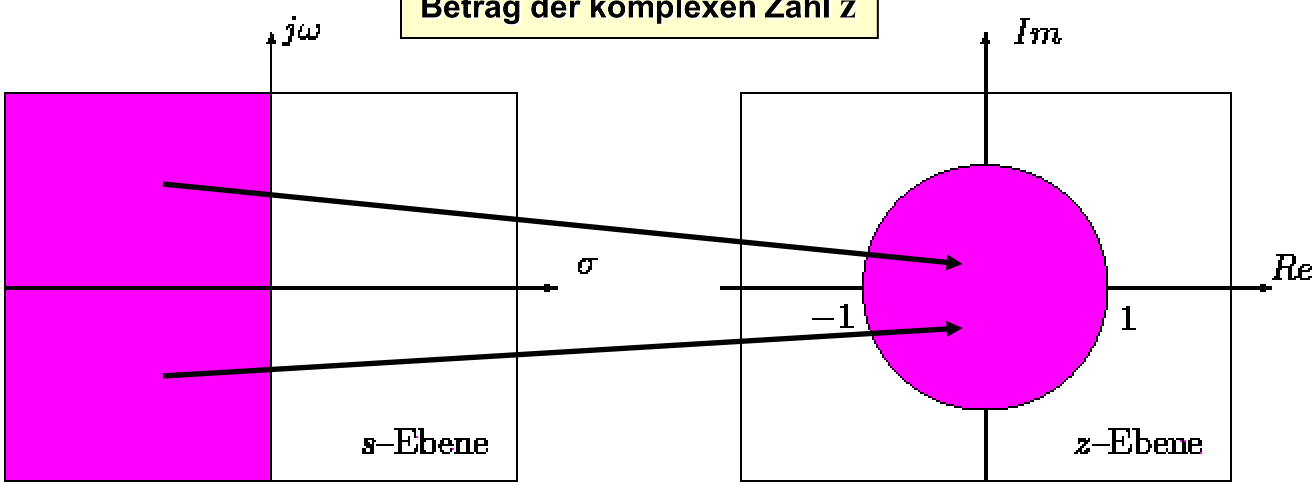
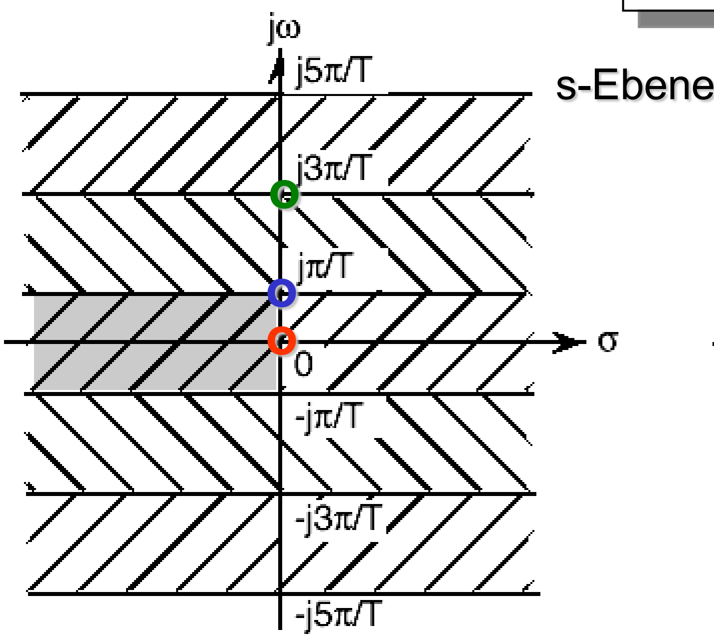


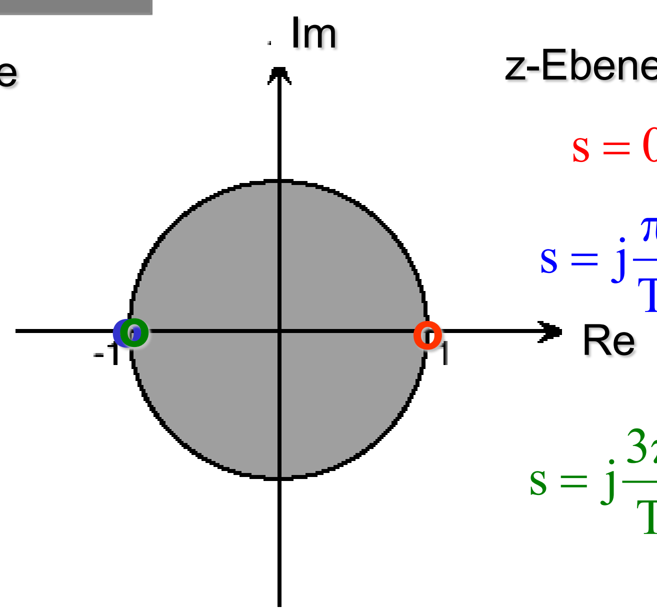
Bild 3.1: Abbildung der s–Ebene auf die z–Ebene

z-Transformation: Zusammenhang s- und z-Ebene

Die Abbildung der s-Ebene auf die z-Ebene ist nicht eineindeutig.

$$z = e^{sT}$$





$$s = 0 \quad \rightarrow \quad z = e^{0 \cdot T} = 1$$

$$s = j\frac{\pi}{T} \quad \rightarrow \quad z = e^{j\frac{\pi}{T} \cdot T} = e^{j\pi} = -1$$

$$s = j\frac{3\pi}{T} \quad \rightarrow \quad z = e^{j\frac{3\pi}{T} \cdot T} = e^{j3\pi} = e^{j\pi} = -1$$

Jeder einzelne Streifen wird eindeutig in dasselbe Gebiet, d.h. auf die gesamte z-Ebene abgebildet.

z-Transformation: Eigenschaften (2)

s–Ebene	z–Ebene
linke komplexe Ebene	Inneres des Einheitskreises
imaginäre Achse	Peripherie des Einheitskreises
rechte komplexe Ebene	Äußeres des Einheitskreises
Ursprung ($s = 0$)	$z = 1$

Tabelle 3.1: Zusammenhänge zwischen s– und z–Ebene

z-Transformation: Eigenschaften (3)

Linearität	$af_1(k) + bf_2(k)$	$aF_1(z) + bF_2(z)$
Rechtsverschiebung	$f(k-i)$	$z^{-i}F(z)$
Linksverschiebung	$f(k+i)$	$z^iF(z) - z^i\sum_{j=0}^{i-1} z^{-j}f(j)$
Differenzensatz	$\Delta f(k) = f(k) - f(k-1)$	$\frac{z-1}{z}F(z)$
Summensatz	$f_\Sigma(k) = \sum_{\nu=0}^{k} f(\nu)$	$\frac{z}{z-1}F(z)$
Faltungssatz	$\sum_{i=0}^{\infty} f_1(k-i)f_2(i)$	$F_1(z)F_2(z)$

z-Transformation: Eigenschaften (4)

Dämpfungssatz	$e^{akT} f(k)$	$F(e^{-aT} z)$
Ähnlichkeitssatz	$a^k f(k)$	$F(\frac{z}{a})$

Anfangswertsatz	$f(0) = \lim\limits_{z \to \infty} F(z)$ **, wenn der Grenzwert existiert**
Endwertsatz	$f(\infty) = \lim\limits_{z \to 1} (z-1) F(z)$ **, wenn der Grenzwert existiert**

Tabelle 3.2: Definitionen und Eigenschaften der z–Transformation

$$f(k) = 1(k) \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$f(\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1) \cdot F(z) \quad = \lim_{z \to 1} \cancel{(z-1)} \cdot \frac{z}{\cancel{z-1}} \quad = \lim_{z \to 1} z = 1$$

Übertragungsfunktion: Beispiel

Gegeben ist die Differenzengleichung

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_0 u(k)$$

Anwendung des Rechtsverschiebungssatzes

$$f(k-i) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; z^{-i} F(z)$$

liefert:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) = b_0 U(z)$$

$$(1 + a_1 z^{-1}) Y(z) = b_0 U(z)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{b_0 z}{z + a_1}}$$

Übertragungsfunktion diskreter Systeme

Kontinuierliche Systeme

Beschreibung mittels Differentialgleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} u(t)$$

Differentiationssatz der Laplace-Transformation

$$f^{(n)}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^n \cdot F(s)$$

liefert:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$= \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$

Zeitdiskrete Systeme

Beschreibung mittels Differenzengleichungen

$$y(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i \, y(k-i) = \sum_{j=0}^{n} b_j \, u(k-j)$$

Rechtsverschiebungssatz der z-Transformation

$$f(k-i) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-i} F(z)$$

liefert:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$= \frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n})}{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n})}$$

Übertragungsfunktion (2)

Kontinuierliche Systeme

Zeitdiskrete Systeme

Gewichtsfunktion und Übertragungsfunktion

$$G(s) = \mathfrak{L}\{g(t)\}$$

Gewichtsfolge und z-Übertragungsfunktion

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g(k)\}$$

Linearität

Parallelschaltung

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

Parallelschaltung

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z)$$

Faltungssatz

Reihenschaltung

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

Reihenschaltung

$$G(z) = G_1(z) \cdot G_2(z)$$

Übertragungsfunktion (3)

Kontinuierliche Systeme | **Zeitdiskrete Systeme**

Verstärkung eines Systems mit Ausgleich

Kontinuierliche Systeme:

$$K = \lim_{t\to\infty} y(t) \quad \text{für} \quad u(t) = 1(t)$$

Zeitdiskrete Systeme:

$$K = \lim_{k\to\infty} y(k) \quad \text{für} \quad u(k) = 1(k)$$

Anwendung des Endwertsatzes

Kontinuierliche Systeme:

$$K = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) \quad \text{für} \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$K = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s)U(s)$$

$$K = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)$$

$$K = \frac{b_0}{a_0}$$

Zeitdiskrete Systeme:

$$K = \lim_{z\to 1} (z-1) \cdot Y(z) \quad \text{für} \quad U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$K = \lim_{z\to 1} (z-1) \cdot G(z)U(z)$$

$$K = \lim_{z\to 1} z \cdot G(z) = G(1)$$

$$K = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

Übertragungsfunktion (4)

Pole und Nullstellen

Zur Definition der Pole und Nullstellen wird Zähler und Nenner von

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n})}{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n})}$$

mit z^n multipliziert:

Polynomform der z-Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n} = \frac{Z(z)}{N(z)}$$

Die Pole der z-Übertragungsfunkion sind die Lösungen der Gleichung

$$N(z) = 0$$

Die Nullstellen der z-Übertragungsfunkion sind die Lösungen der Gleichung

$$Z(z) = 0$$

Rücktransformation in den Zeitbereich

Für die Rücktransformation

$$F(z) \quad \longrightarrow \quad f(k)$$

stehen 3 Methoden zur Verfügung:

1. **Polynomdivision**
2. **Residuenmethode**
3. **Partialbruchzerlegung**

Einfache Berechnung der ersten Elemente von f(k)

Analytischer Ausdruck für ein Glied der Folge f(k)

Wurde bereits in SRT ausführlich behandelt

Polynomdivision

Beispiel:

$$F(z) = \frac{1.08z - 0.4z^2}{(z+0.5)(z-0.3)^2} = \frac{-0.4z^2 + 1.08z}{z^3 - 0.1z^2 - 0.21z + 0.045}$$

$$(-0.4z^2 + 1.08z) : (z^3 - 0.1z^2 - 0.21z + 0.045) = -0.4z^{-1}$$

$$\underline{-(-0.4z^2 + 0.04z + 0.084 - 0.018z^{-1})}$$

$$1.04z - 0.084 + 0.018z^{-1} \qquad + 1.04z^{-2}$$

$$\underline{-(1.04z - 0.104 - 0.2184z^{-1} + 0.0468z^{-2})}$$

$$0.02 + 0.2364z^{-1} - 0.0468z^{-2} \qquad + 0.02z^{-3}$$

$$f(k) = \{0,\ -0.4,\ 1.04,\ 0.020,\ 0.2384,\ \dots$$

$$0.2384z \quad \dots \qquad + 0.2384z^{-4}$$

$$F(z) = 0 \cdot z^0 - 0.4z^{-1} + 1.04z^{-2} + 0.020z^{-3} + 0.2384z^{-4}$$

Berechnung der Ausgangsgröße

Kontinuierliche Systeme

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Laplace-Transformierte Eingangsgröße einsetzen:

z.B. $U(s) = \mathfrak{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Lösung durch inverse Laplace-Transformation

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

Zeitdiskrete Systeme

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z)$$

Rechtsverschiebungssatz der z-Transformation

$$f(k-i) \circ\!\!-\!\!\bullet \; z^{-i}F(z)$$

liefert:

$$y(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i\, y(k-i) = \sum_{j=0}^{n} b_j\, u(k-j)$$

Lösung durch Einsetzen der Eingangsfolge

z.B. $u(k) = 1(k)$

Berechnung der Ausgangsgröße (2)

Gegeben:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,632}{z - 0,368}$$

$$zY(z) - 0,368 \cdot Y(z) = 0,632 \cdot U(z)$$

$$Y(z) - 0,368 \cdot z^{-1} Y(z) = 0,632 \cdot z^{-1} U(z)$$

Rechtsverschiebungssatz

$$y(k) - 0,368 \cdot y(k-1) = 0,632 \cdot u(k-1)$$

für z.B.: $u(k) = 1(k)$

$$y(k) = 0,368 \cdot y(k-1) + 0,632 \cdot 1(k-1)$$