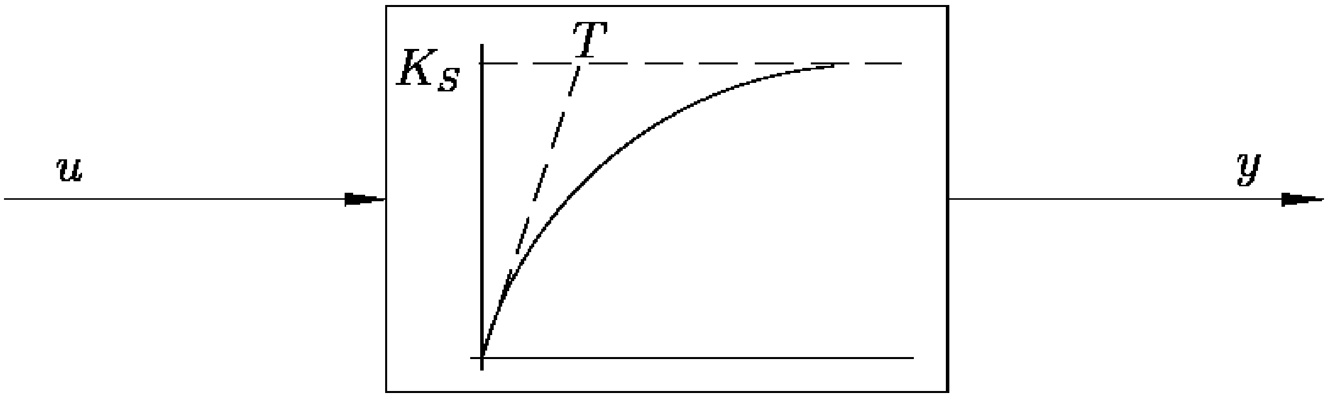
PT1-System (System mit Ausgleich)

Differentialgleichung:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = K_s u(t)$$



Blockschaltbild des Systems 1. Ordnung

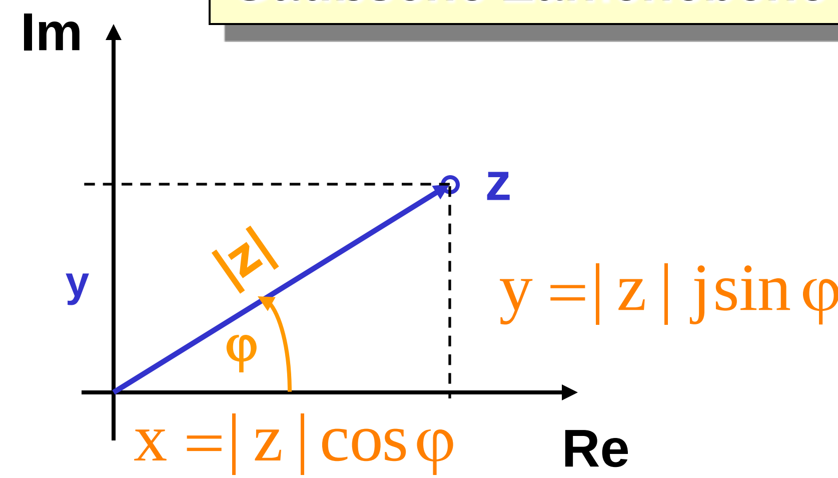
Kenngrößen: Zeitkonstante T
Systemverstärkung $K_S = h(\infty)$

Kartesische Koordinaten

$$z = x + jy$$

Darstellung als Zeiger (Vektor) in der komplexen Zahlenebene (Gaußschen Zahlenebene).

Gaußsche Zahlenebene



Polarkoordinaten

$$z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

Exponentialform

Aus der Eulersche Identität

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi}$$

folgt $z = |z|\, e^{j\varphi}$

Die Fouriertransformierte oder Spektraldichte $F(j\omega)$ ist eine komplexwertige Funktion der reellen Frequenz ω mit dem Betrag $|F(j\omega)|$ und der Phase $\arg F(j\omega)$ und wird auch als *Spektrum* der Zeitfunktion $f(t)$ bezeichnet. Die graphische Darstellung von $\boxed{|F(j\omega)|}$ und $\boxed{\arg F(j\omega)}$ nennt man $\boxed{\textit{Amplitudendichtespektrum}}$ bzw. $\boxed{\textit{Phasenspektrum.}}$

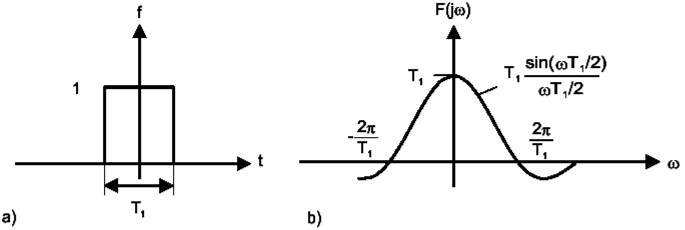
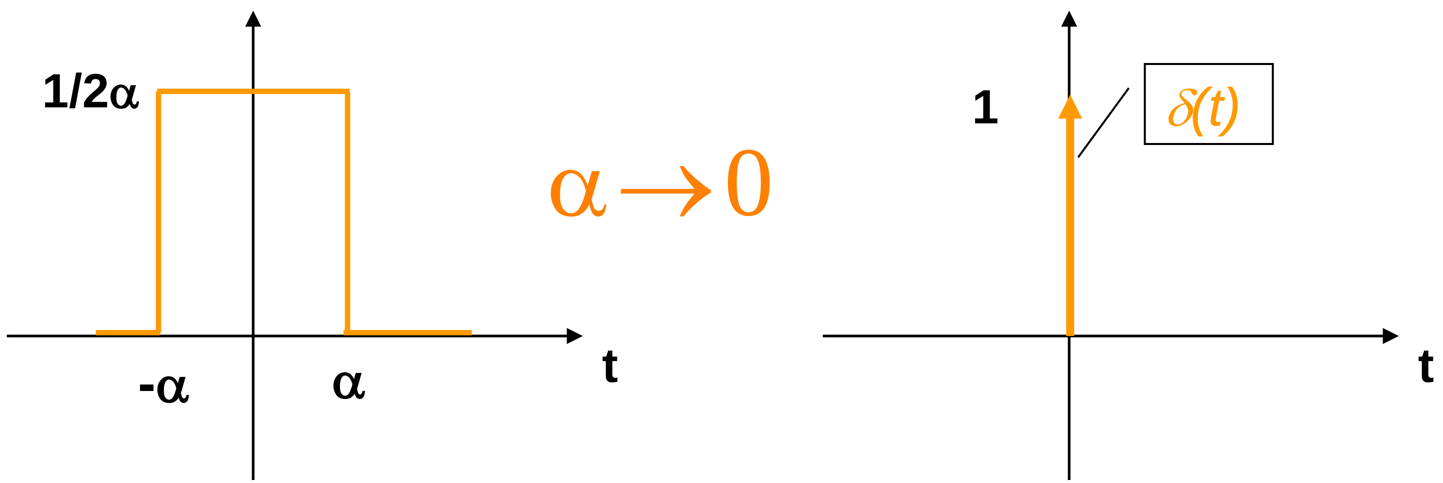


Bild A.6: Zeitverlauf (a) und Spektraldichte (b) eines einzelnen Rechtecks.



Die Deltafunktion ist eine Distribution oder verallgemeinerte Funktion

⇒ **Ein von Null verschiedener Funktionswert ergibt sich nicht durch Einsetzen eines Argumentes, sondern durch eine Rechenvorschrift.**

Ausblendeigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

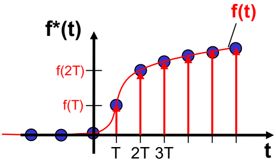
Spektrum diskreter Signale

Gesucht ist eine kontinuierliche Darstellung eines zeitdiskreten Signals *f(kT)*

Darstellung eines zeitdiskreten Signals *f(kT)* mit Hilfe einer Folge von Deltaimpulsen:

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,\delta(t-kT)$$



Periodische Zeitfunktion

Ersetzen der Dirac-Impulsfolge durch die komplexe Fourier-Reihe:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \frac{1}{T} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\omega_A t}$$

$$\omega_A = \frac{2\pi}{T}$$

oder in komplexer Notierung:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{jn\omega_0 t} \qquad \text{mit} \qquad c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t \tag{A.3}$$

Die rechte Seite der Gl. (A.1) nennt man *Fourier–Reihe* von $f(t)$ mit der Grund(kreis)frequenz ω_0. Die reellen Koeffizienten a_n und b_n heißen *Fourier–Koeffizienten* der Fourier–Reihe und können graphisch als diskrete Linienspektren dargestellt werden, Bild A.1.

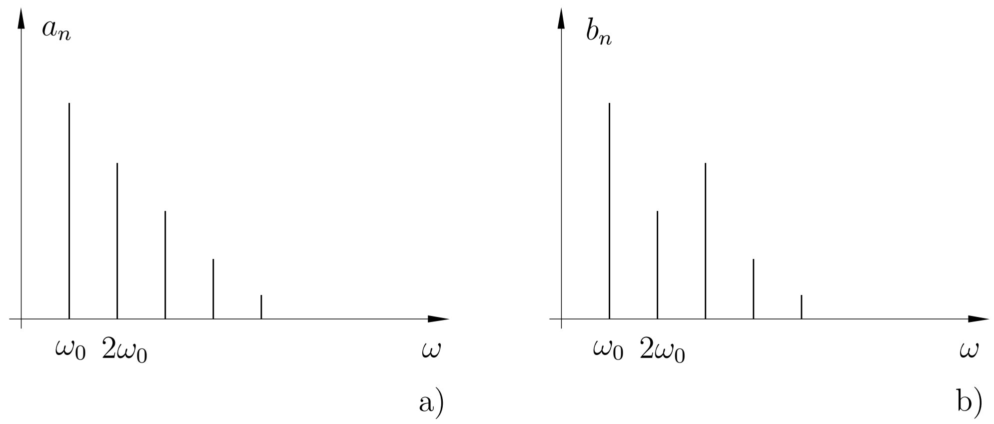


Bild A.1: Darstellung eines periodischen Signals durch Linienspektren
a) Anteil der Cosinus–Glieder b) Anteil der Sinus–Glieder

Werden auf der rechten Seite der Gl. (A.1) die Sinus– und Cosinusschwingungen gleicher Frequenz zusammengefaßt, so erhält man folgende alternative Form der Fourier–Reihe:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \tag{A.4}$$

mit

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \tag{A.5}$$

$$A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \qquad i = 1, 2, ... \tag{A.6}$$

und

$$\varphi_i = \arctan \frac{a_i}{b_i}, \qquad i = 1, 2, ... \tag{A.7}$$

Die Summanden für $n = 1$ in den Gleichungen (A.1) und (A.4) beschreiben die *Grundschwingung* oder erste Harmonische der Fourier–Zerlegung. Alle anderen Summanden sind Funktionen mit einem Vielfachen der Grundfrequenz ω_0 und werden als Oberwellen oder Oberschwingungen bezeichnet.

Eigenschaften der Fourier-Transformation

(1) Linearität

$$\mathcal{F}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{F}\{f_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{f_2(t)\}$$

(2) Verschiebung im Zeitbereich

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = F(j\omega) e^{-j\omega t_0}$$

(3) Verschiebung im Frequenzbereich

$$\mathcal{F}\left\{f(t) e^{j\omega_0 t}\right\} = F\left(j\omega - j\omega_0\right)$$

(4) Dehnung im Zeitbereich

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

(5) Differentiation im Zeitbereich

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = (j\omega)^n F(j\omega)$$

(6) Integration im Zeitbereich

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$$

(7) Faltung im Zeitbereich

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

(8) Faltung im Frequenzbereich

$$\mathcal{F}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\omega') F_2(j\omega - j\omega') d\omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$$

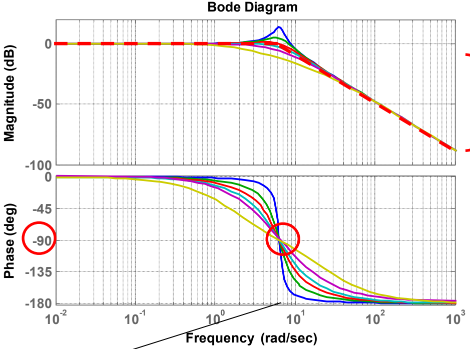
Frequenzgang PT_2-System (komplexe Pole)

Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{2D}{\omega_0}\omega - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2jD\omega_0\omega}$$

Bodediagramm:

K = 1



-40 dB/Dekade

D = 0,1
D = 0,3
D = 0,5
D = 0,7
D = 1
D = 2

$\omega_0 = 2\pi$