

- **Einordnung und Motivation**
- **Grundlegende Definitionen**
 - Kontinuierliches Signal
 - Quantisiertes Signal
 - Zeitdiskretes Signal
 - Digitales Signal
 - Auflösung der A/D- Umsetzer der MicroAutoBox
 - Kontinuierliches System
 - Abtastsystem
 - Diskretes System
- **Schreibweise diskreter Signale**

- **Elementare diskrete Signale**
 - Einheitsimpuls, Impulsfolge
 - Einheitssprung, Sprungfolge
 - Energie- und Leistungssignale
- **Eigenschaften diskreter Systeme**
 - Linearität, Zeitinvarianz, Kausalität
 - Gewichtsfolge und Faltungssummation
 - Differenzengleichung eines PT_1 -Systems

% Sprungantwort für die Differenzengleichung 1. Ordnung

% $y(k) = -a_1 * y(k-1) + b_0 * u(k)$

% als Approximation der DGL

% $T_1 * dy(t)/dt + y(t) = u(t)$

%

T1 = 1;

T = 0.1;

a1 = -T1/(T1+T)

b0 = T/(T1+T)

%

uk = 1;

%

% Anfangsbedingung $y(0) = 0$

%

y0 = 0;

%

% Berechnung der Ausgangsfolge für $k = 1$

%

y(1) = -a1 * y0 + b0 * uk;

for i=2:100

y(i) = -a1 * y(i-1) + b0 * uk;

end

%

% Graphische Darstellung der Ausgangsfolge

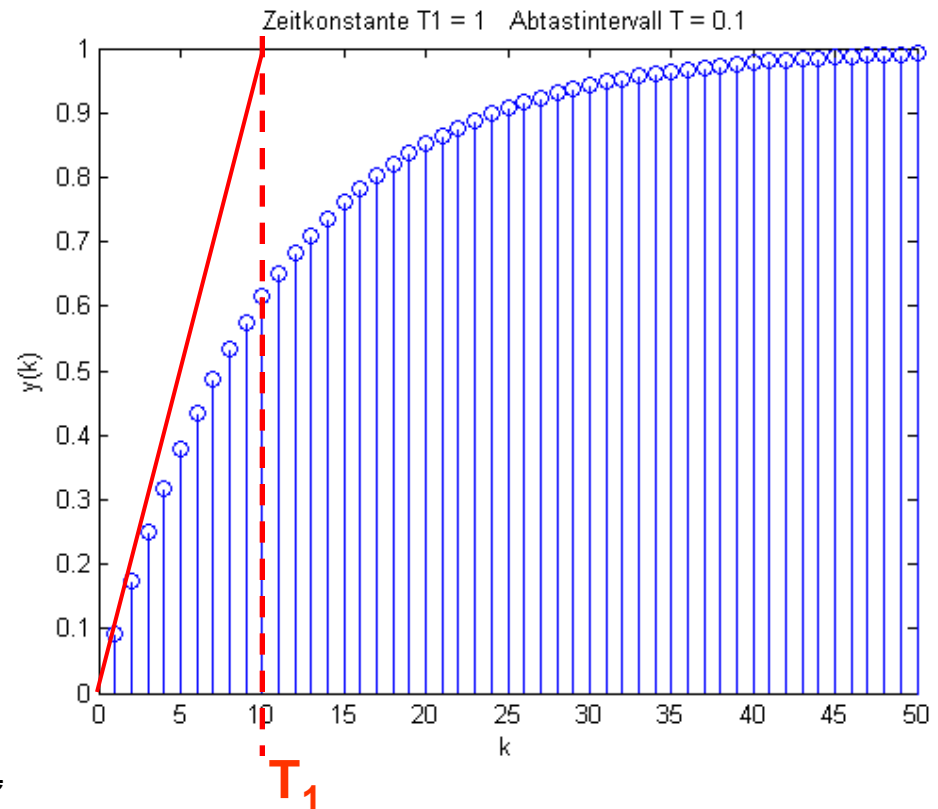
%

stem(y(1:50))

xlabel('k')

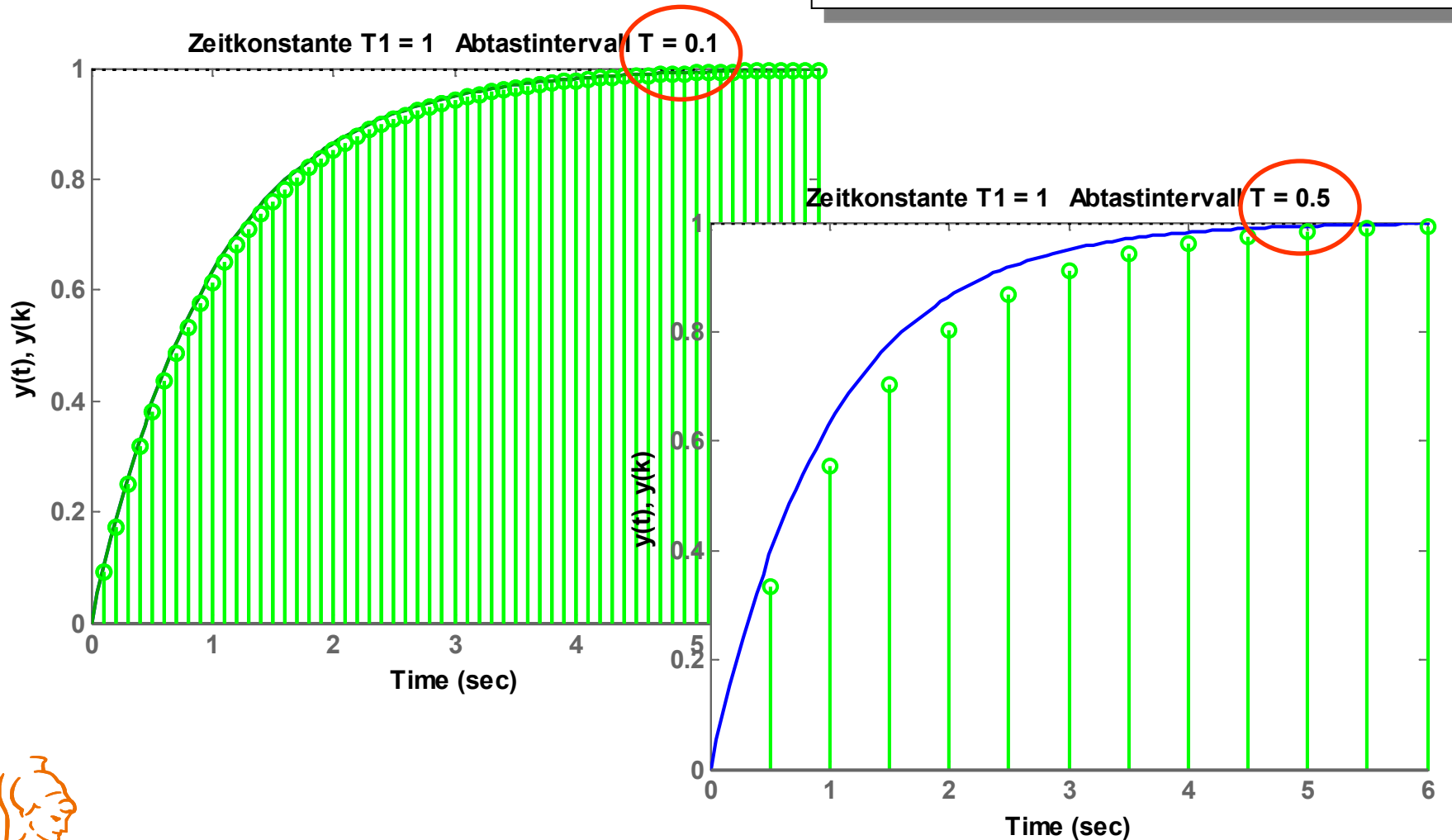
ylabel('y(k)')

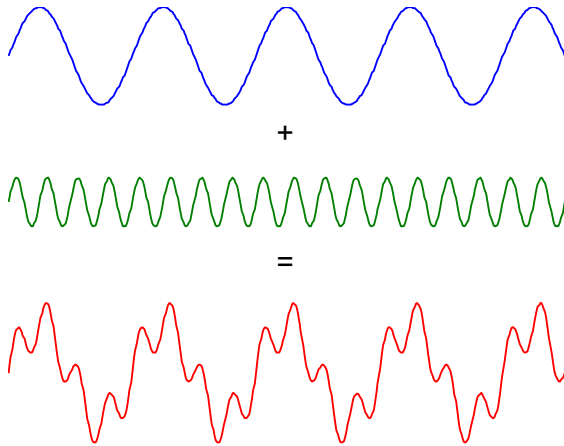
title(['Zeitkonstante T1 = ', num2str(T1), ' Abtastintervall T = ' num2str(T)])



$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$y(k) = \frac{T_1}{T_1 + T} y(k-1) + \frac{T}{T_1 + T} u(k)$$





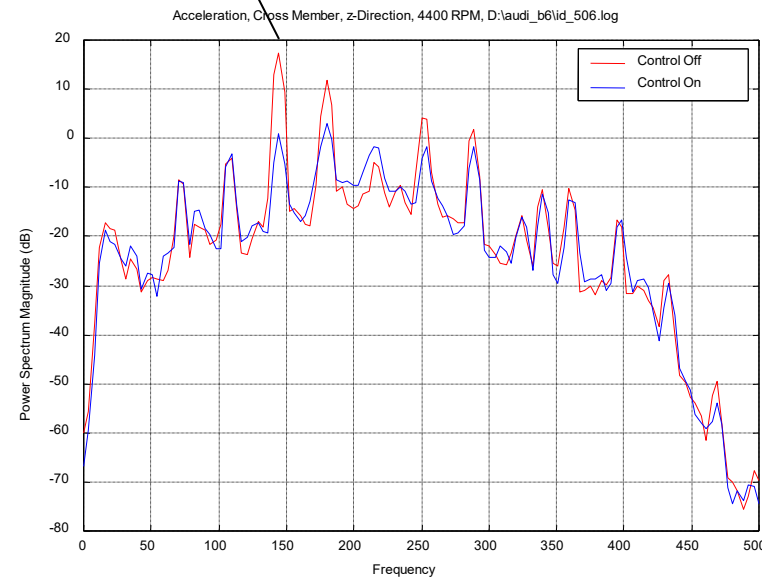
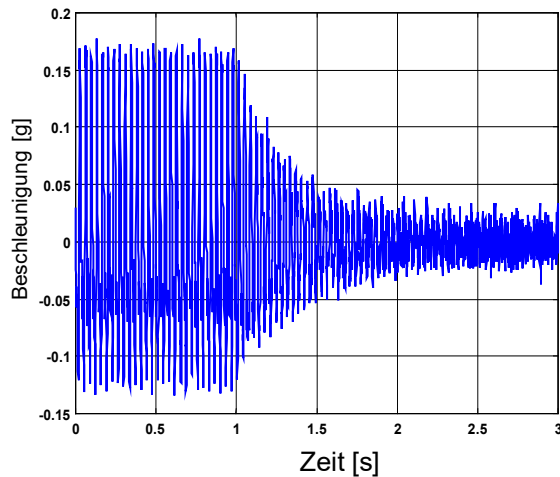
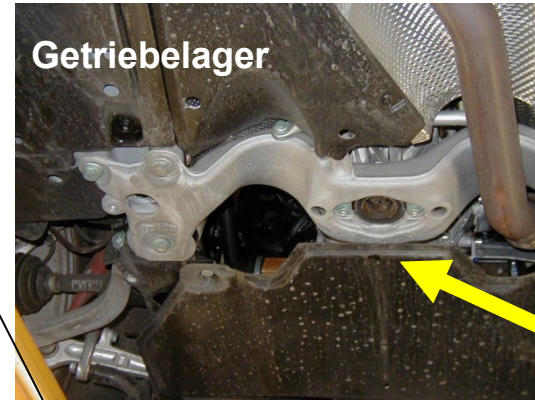
- **Zerlegung periodischer Funktionen in eine Reihe harmonischer Funktionen.**
- **Bestimmung und Bedeutung des Amplitudenspektrums eines Signals**
- **Bedeutung in den Bereichen**
 - Signalanalyse
 - Schwingungstechnik
 - Akustik



Aktive Kompensation von motorerregten Schwingungen



2. Motorordnung



- Eine periodische Funktion kann in eine Funktionenreihe aus **Sinus-** und **Kosinusfunktionen** zerlegt werden.

■ Reelle Fourier-Reihe $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$

reelle Koeffizienten

■ Komplexe Fourier-Reihe $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$

i.a. komplex

■ Betrag-Phasen-Darstellung $f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$

reell



Fourier-Transformation versus Laplace-Transformation

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$e^{-st} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}$$

- Die Fourier-Transformation ist wie die Laplace-Transformation eine **Integraltransformation**.
- Für Funktionen $f(t)$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ entspricht die Laplacetransformierte von $f(t)$ der Fouriertransformierten von $f(t)e^{-\sigma t}$.
- Bereits einfache Funktionen wie z.B. die **Sprungfunktion** $1(t)$ erfüllen die Konvergenzbedingung der Fourier-Transformation nicht.
- Die **Fourier**-Transformation ist besser für die **Analyse** von **Signalen** geeignet.
- Die **Laplace**-Transformation ist besser für die **Analyse** und die Beschreibung von **Systemen** geeignet.



Was ist das Spektrum eines kontinuierlichen Signals ?

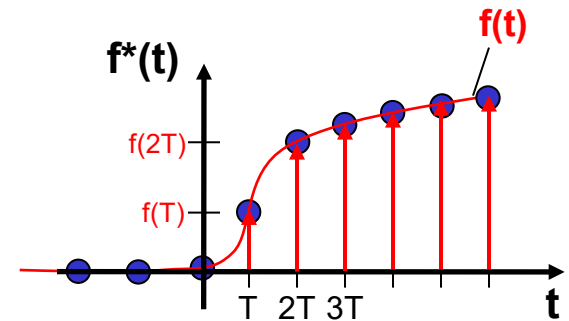
- Das **Spektrum** $F(j\omega)$ ist die Fourier-Transformierte der Zeitfunktion $f(t)$.
- Das **Spektrum** gibt an, welche Frequenzen in einem Signal vorkommen und welches Gewicht sie haben.
- Einem **periodischen** Signal kann über die Fourier-Reihenentwicklung ein **diskretes Amplitudenspektrum** zugeordnet werden.
- Das **Spektrum** (Amplitudendichte, Phase) eines **nichtperiodischen** Signals ist kontinuierlich.
- Die Fourier-Transformation ist nur für kontinuierliche Zeitfunktionen $f(t)$ definiert.



Gesucht ist eine kontinuierliche Darstellung eines zeitdiskreten Signals $f(kT)$

Darstellung eines zeitdiskreten Signals $f(kT)$ mit Hilfe einer Folge von Deltaimpulsen:

$$\begin{aligned}
 f^*(t) &= f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT)
 \end{aligned}$$



Periodische Zeitfunktion

Ersetzen der Dirac-Impulsfolge durch die komplexe Fourier-Reihe:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\omega_A t}$$

$\omega_A = \frac{2\pi}{T}$



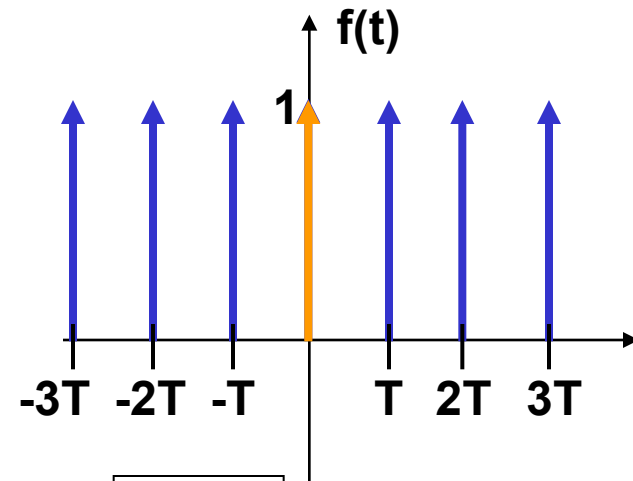
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Gesucht:

Komplexe Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



Fourier-Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Aus der **Ausblendeigenschaft** des Deltaimpulses folgt:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} e^{-jn\omega_0 \cdot 0} = \frac{1}{T}$$



Fourier-Reihe der Folge von Deltaimpulsen:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

liefert:

$$f^*(t) = f(t) \frac{1}{T} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\omega_A t}.$$

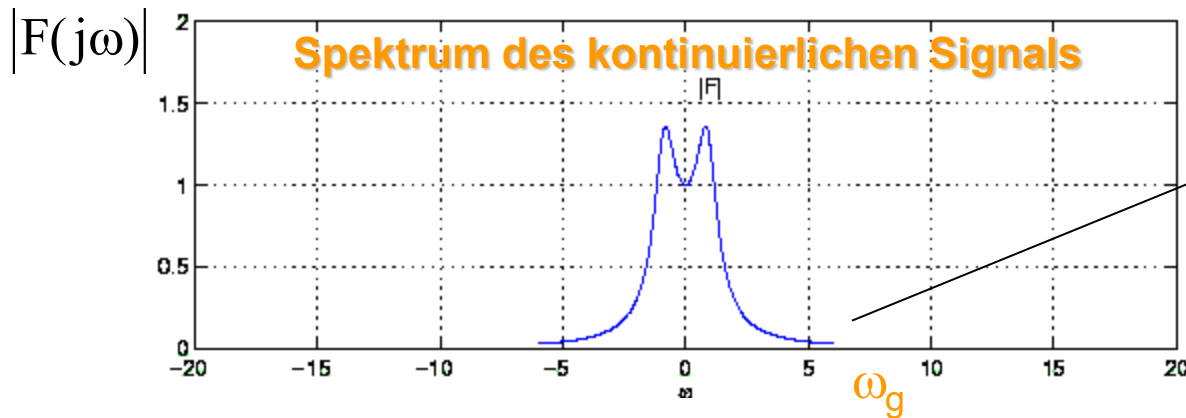
Hierauf wird jetzt die Fourier-Transformation angewendet:

$$\mathcal{F}\{f^*(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f(t)e^{j\nu\omega_A t}\}.$$

Mit Hilfe des Frequenzverschiebungssatzes erhält man:

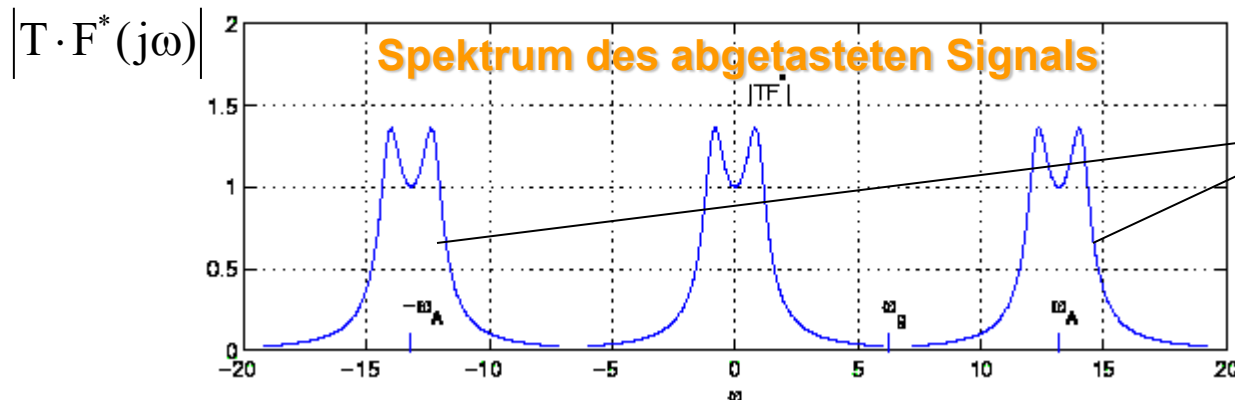
$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F(j(\omega - \nu\omega_A)).$$





bandbegrenztetes
kontinuierliches
Signal

$$F^*(j\omega) = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{v=-\infty}^{\infty} F(j(\omega - v\omega_A)) .$$



Seitenbänder

Spektrum eines zeitdiskreten Signals ist periodisch mit der Periode $\omega_A = 2\pi/T$ und mit $1/T$ gewichtet



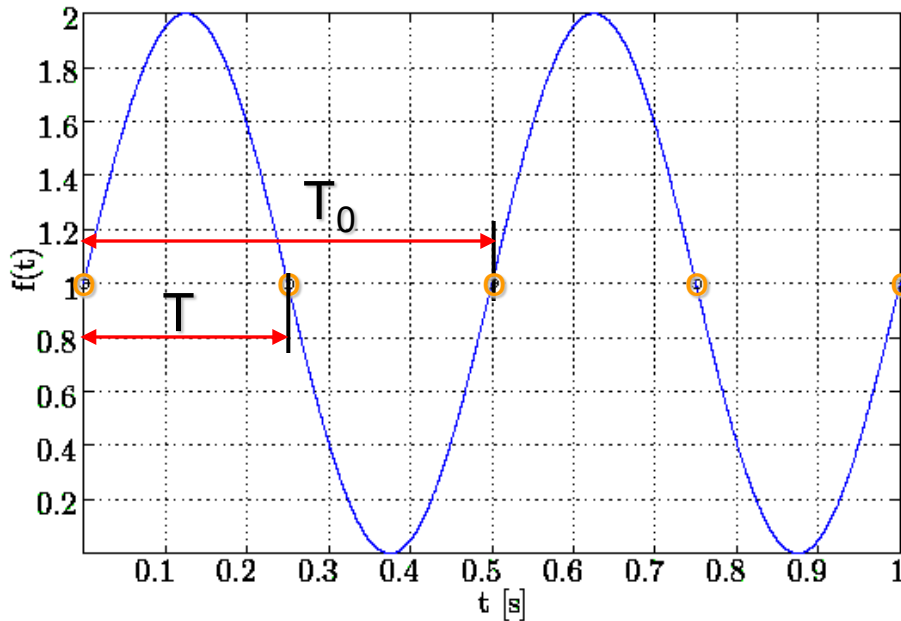


Bild 2.16: Abgetastetes Sinussignal

Periodendauer: $T_0 = 0,5 \text{ s}$

Frequenz: $f_0 = 2 \text{ Hz}$

Abtastintervall: $T = 0,25 \text{ s}$

Abtastfrequenz: $f_A = 4 \text{ Hz}$



Die abgetasteten Werte des Sinussignals sind von einem Gleichspannungssignal nicht zu unterscheiden, wenn die Abtastfrequenz doppelt so hoch ist, wie die Frequenz des Sinussignals.



Satz 2.1 Abtasttheorem von Shannon

- a) Ein kontinuierliches, **bandbegrenzte**s Signal $f(t)$ dessen Fouriertransformierte

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.29)$$

außerhalb des Intervalls $(-\omega_g, \omega_g)$ verschwindet, ist eindeutig durch die äquidistanten Abtastwerte bestimmt, wenn für die Abtast(kreis)frequenz $\omega_A = 2\pi f_A$ gilt:

$$\omega_A > 2\omega_g. \quad (2.30)$$

- b) Das kontinuierliche Signal $f(t)$ kann dann aus der Abtastfolge $f(k)$ mittels der *Shannon'schen Interpolationsformel* berechnet werden:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin \omega_A(t - kT)/2}{\omega_A(t - kT)/2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin \omega_g(t - kT)}{\omega_g(t - kT)}. \quad (2.31)$$



Beispiel: Audio-CD

Frequenzbereich: 5 Hz – 20 kHz

Abtastfrequenz: 44,1 kHz

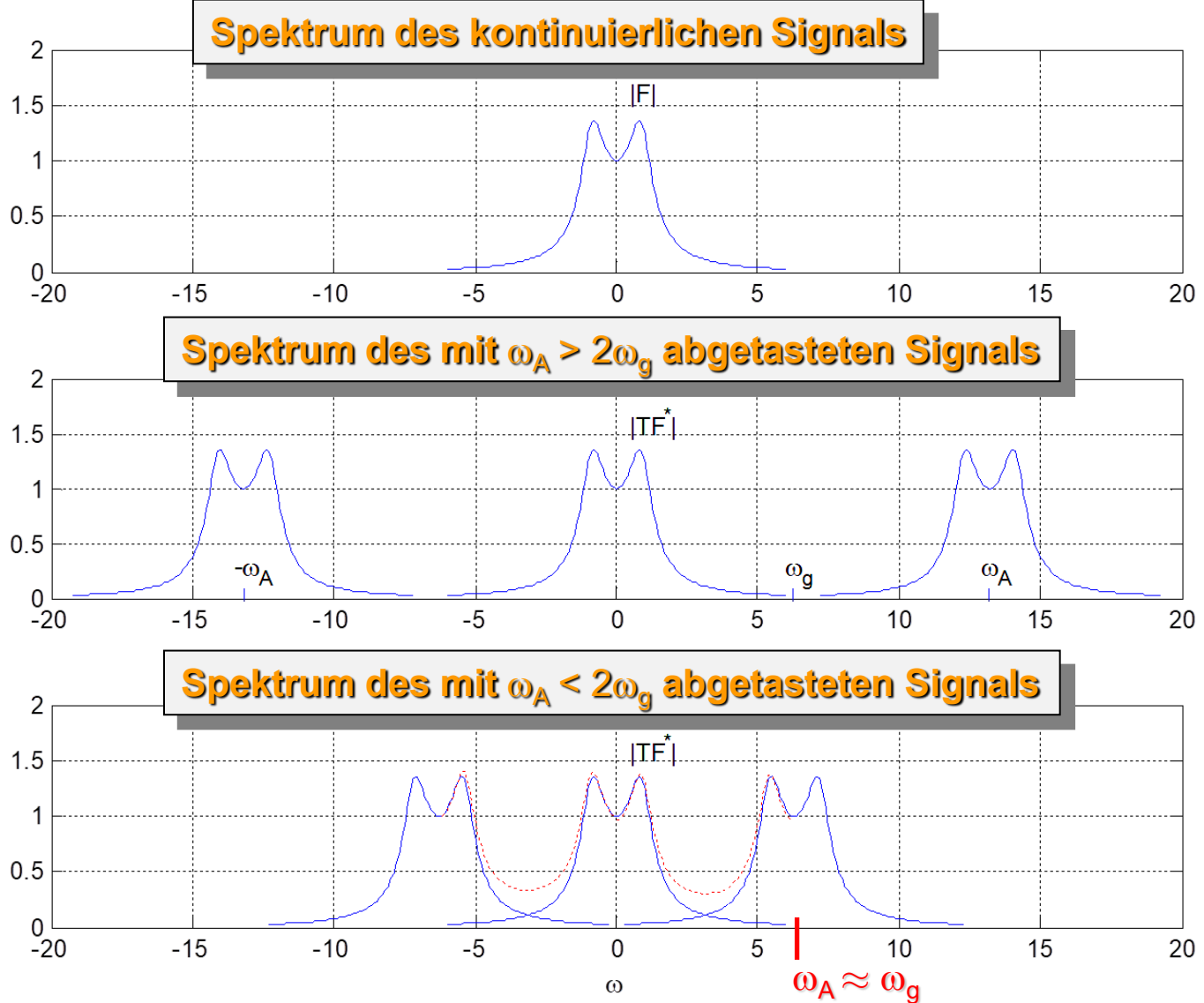
Nyquistfrequenz $f_A/2$ liegt 10 %
über der Grenzfrequenz 20 kHz

Amplitudenauflösung: 16 bit ($1/32767=0,00003$)



Speicherbedarf: $16 \text{ bit} \cdot 2 \cdot 44100 \text{ Hz} / 8 = 176,4 \text{ KByte} / \text{s}$

$\Rightarrow 176,4 \text{ KByte} / \text{s} \cdot 60 \text{ s} = 10,6 \text{ MByte} / \text{Minute}$



Die Spektren des **kontinuierlichen** und des **diskreten** Signals stimmen offensichtlich im Intervall $(-\omega_A/2 \leq \omega \leq \omega_A/2)$ überein, wenn die folgenden Forderungen eingehalten werden:

- $F(j\omega)$ muß **bandbegrenzt** sein, also im Frequenzbereich $|\omega| \geq \omega_g$ identisch verschwinden.
- Die Abtastkreisfrequenz $\omega_A = 2\pi f_A = 2\pi/T$ muß mindestens doppelt so groß sein, wie die maximale Frequenz ω_g von $F(j\omega)$.



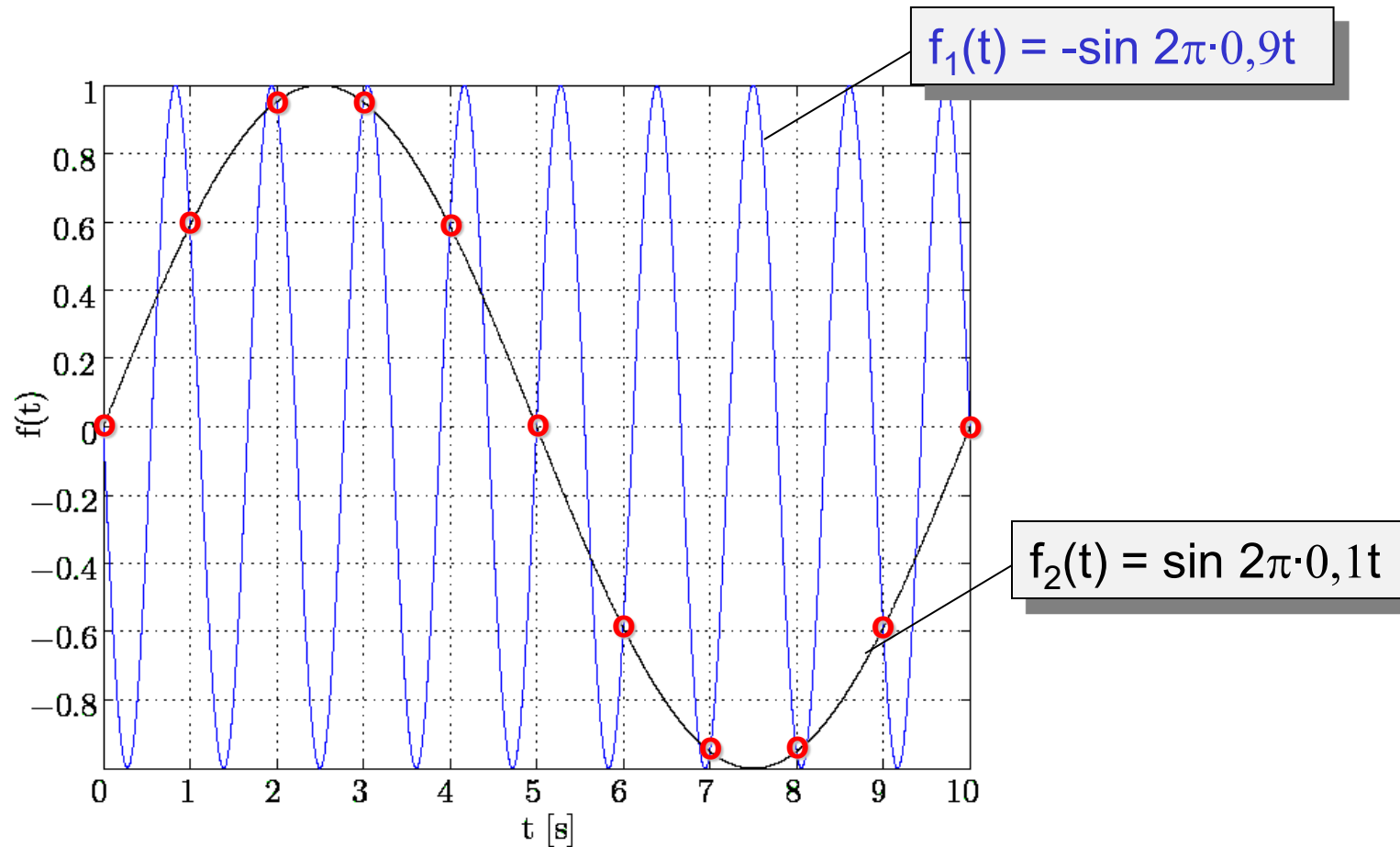
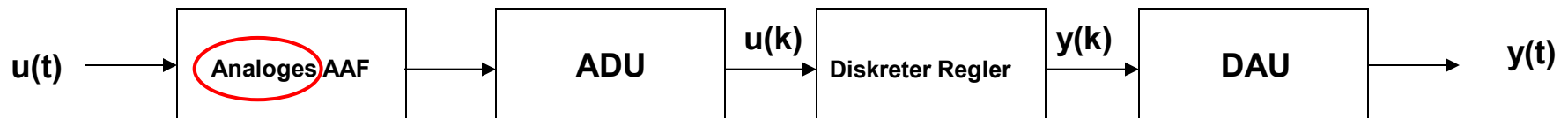


Bild 2.18: Zwei periodische Signale mit den Frequenzen 0,1 Hz bzw. 0,9 Hz, die bei einer Abtastperiode $T = 1$ die gleichen abgetasteten Werte haben.

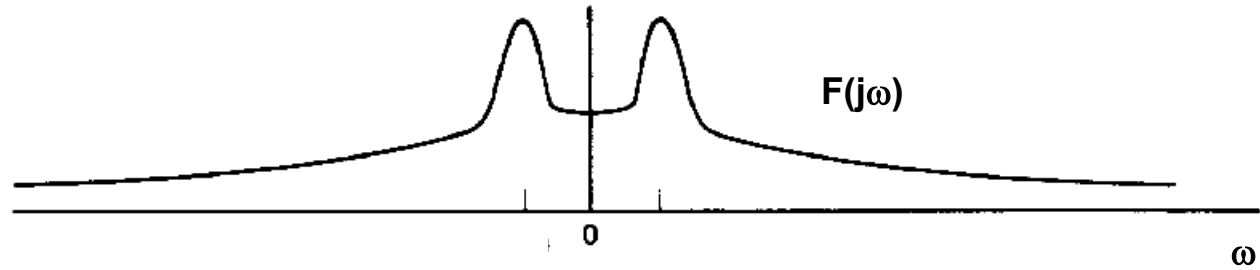


Verhinderung der Frequenzfaltung

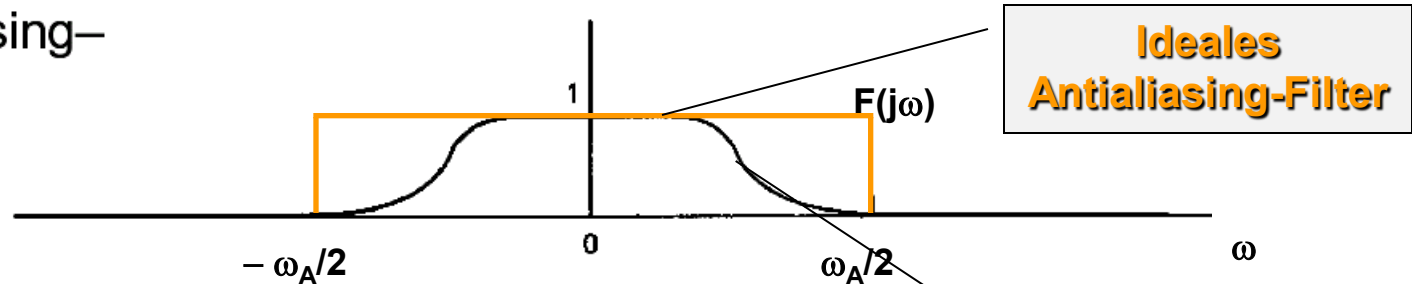
- Bei **nicht**-bandbegrenzten Signalen muss man **vor** der Abtastung mit Hilfe eines **Tiefpasses** (**Anti-Aliasing-Filter**) Frequenzanteile ab der **halben Abtastfrequenz** unterdrücken oder am besten vollständig verschwinden lassen.
- Bei **bandbegrenzten** Signalen muss die Abtastfrequenz größer als das Doppelte der höchsten, im Signal vorkommenden Frequenz sein. Wenn nicht möglich, Einsatz eines Anti-Aliasing-Filters.



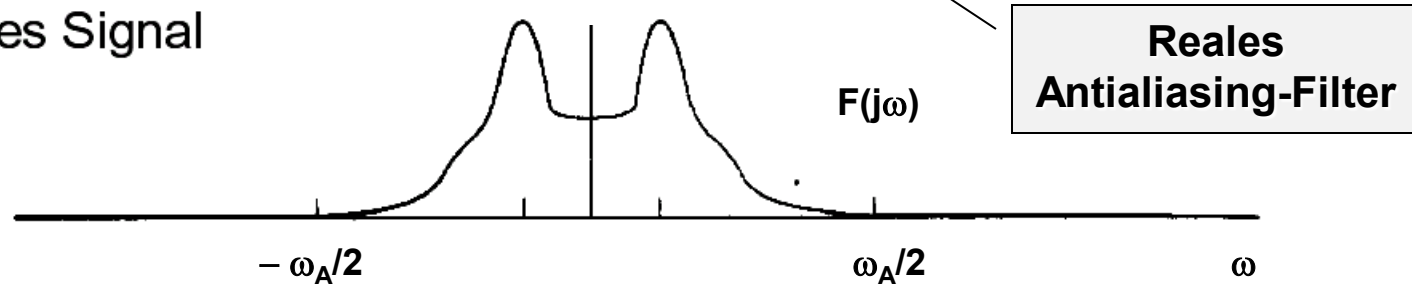
Original



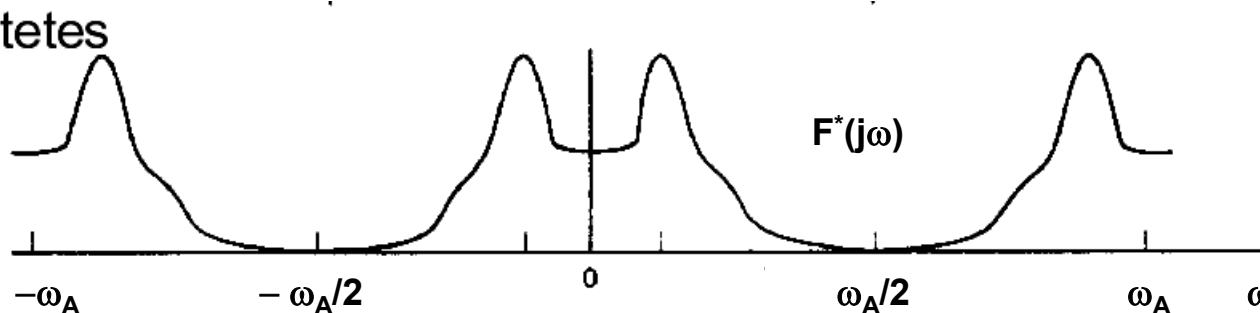
Antialiasing-Filter



Gefiltertes Signal



Abgetastetes Signal



	Abtastfrequenz
Regelkreise im Kraftfahrzeug	100 – 150 Hz
Regelkreise im Flugzeug	50 – 100 Hz
Regelkreise in der Verfahrenstechnik	1 – 10 Hz
CD-Audio-Aufzeichnung	44,1 kHz
Signalverarbeitung mit Mikrocontroller	bis 50 MHz