Digitale Regelung

Vorlesung:

Dozent: Professor Ferdinand Svaricek

Ort: BBB

Zeit: Di 16.45 – 18.15 Uhr

Seminarübungen:

Dozenten: Carsten Herzog M.Sc.

Ort: 33/2331

Zeit: Mo 9.45 – 11.15 Uhr (Beginn: 19.04.2021)

Vorlesungsskript:

https://www.unibw.de/lrt15/lehre/vorlesungen-1/unterlagen-digreg/skript-digitale-regelung.pdf/download

Motivation

- Die reale Welt ist überwiegend analog und kontinuierlich.
- Die meisten Regler werden aber inzwischen mit Hilfe von Computern realisiert, die nur zeitdiskrete und amplitudenquantisierte Signale verarbeiten können.
- Einfache Realisierung komplexer Regelungs-, Steuerungs- und Überwachungsalgorithmen.
- Realisierung in Software anstatt Hardware ist kostengünstiger.
- Flexibilität (einfache Anpassung und Änderung der Algorithmen).
- Kürzere Entwicklungszeiten (Rapid Prototyping).

Einordnung

- Die Vorlesung **Digitale Regelung** befasst sich mit den Grundlagen der **Regelung zeitabgetasteter Systeme** (Synonyme: **zeitdiskrete Regelung** oder **Abtastregelung**).
- Die **digitale Regelungstechnik** befasst sich mit der Analyse und der Synthese zeitdiskreter Regelkreise.
- Sowohl in modernen **Kraftfahrzeugen** als auch in modernen **Flugzeugen** werden Steuerungen und Regelungen heutzutage überwiegend digital realisiert.

Voraussetzungen

- **Steuer- und Regelungstechnik**
  - Gewichts- und Übergangsfunktion, Übertragungsfunktion, Pole und Nullstellen, Stabilität, PT_1, PT_2,…, Zustandsraummodelle,…
- **Grundlagen der Messtechnik**
  - Analog-/Digital-Umsetzer
  - Fourier-Transformation
  - Spektralanalyse
- **Mathematik**
  - Komplexe Zahlen
  - Laplace-Transformation
  - Matrizenrechnung

Lerninhalte

- **Diskrete Signale und Systeme**
  - Signalarten, Quantisierung, Periodische Signalabtastung, Halteglieder, Impulsfolge, Sprungfolge
- **Beschreibung von dynamischen Systemen im Zeitbereich durch Differenzengleichungen**
- **Spektrum diskreter Signale**
- **Abtasttheorem**
- **Frequenzfaltung, Aliasing**

- **Beschreibung von dynamischen Systemen im Frequenzbereich durch die z-Transformation**
  - Vergleich mit dem s-Bereich
  - z-Übertragungsfunktion
  - Pole und Nullstellen
- **Zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung**
- **Stabilität zeitdiskreter Systeme**
- **Entwurf digitaler Regler**

Historischer Hintergrund

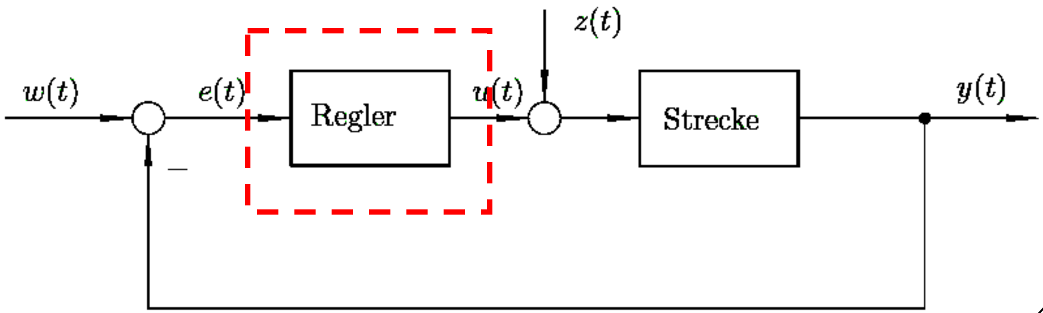
Die Entwicklung der digitalen Signalverarbeitung und der Regelungstechnik ist eng mit der technischen Entwicklung der Digitalrechner verknüpft.

1954 Hughes Aircraft Company setzt erstmals einen Digitalrechner zur Überwachung eines Autopiloten ein.

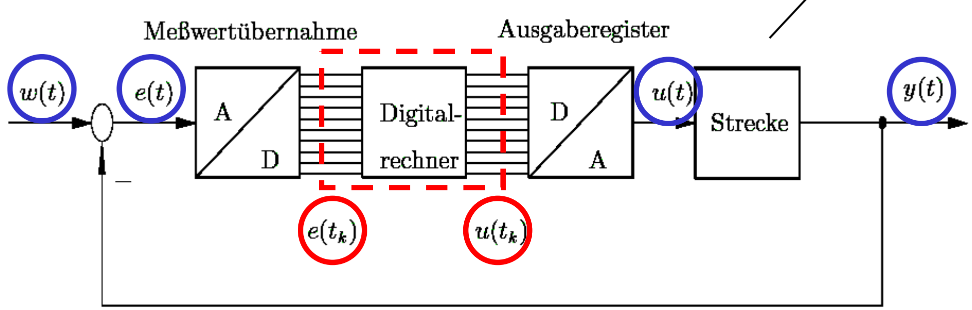
1958 Louisiana Power & Light Company setzt erstmals einen Digitalrechner zur Überwachung eines Kraftwerks ein.

1959 Imperial Chemical Industries (ICI) erprobt digitale Regelung (Direct Digital Control) bei der Produktion von Sodaasche.

1965 Etwa 1000 Digitalrechner sind im industriellen Einsatz. Digital Equipment Corporation (DEC) bringt den Minicomputer PDP-8 (Kosten $18000) auf den Markt.



Kontinuierlicher Regelkreis



Regelkreis mit Digitalrechner als Regler

Abtastregelung bzw. **zeit-diskretes Regelungssystem**

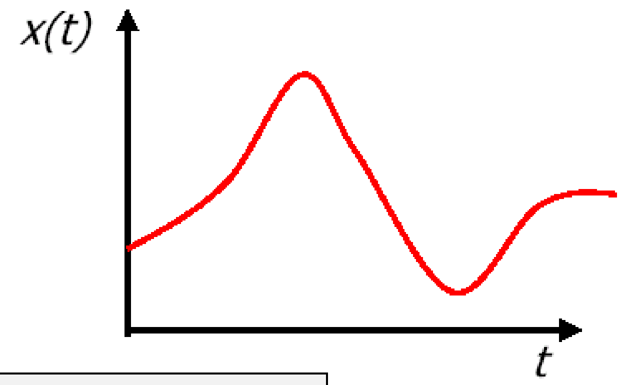
Im Regelkreis sind Elemente enthalten, die Signale nur zu diskreten Zeitpunkten über-tragen.

Unterscheidung:

- Analoge Signale
- Digitale Signale

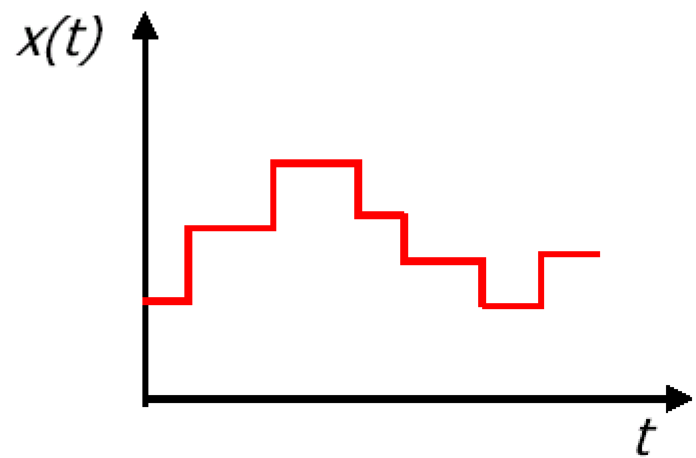
Definition: Kontinuierliches analoges Signal

Ein **kontinuierliches analoges Signal** kann jeden beliebigen Wert auf der Amplituden- bzw. Zeitachse annehmen.



Definition: Kontinuierliches quantisiertes Signal

Ein **kontinuierliches quantisiertes Signal** kann jeden beliebigen Wert auf der Zeitachse, aber nur bestimmte Amplitudenwerte annehmen.



Bei der gleichförmigen Quantisierung wird der Quantisierungsbereich in 2^w gleichgroße Intervalle aufgeteilt. Hierbei ist w die Anzahl der zur Verfügung stehenden Bits, man spricht hier auch von der Wortlänge.

Beispiel:

Quantisierungsbereich: 0 – 10 Volt

Wortlänge: 3 bit

⇨

Anzahl der Intervalle: $2^3 = 8$

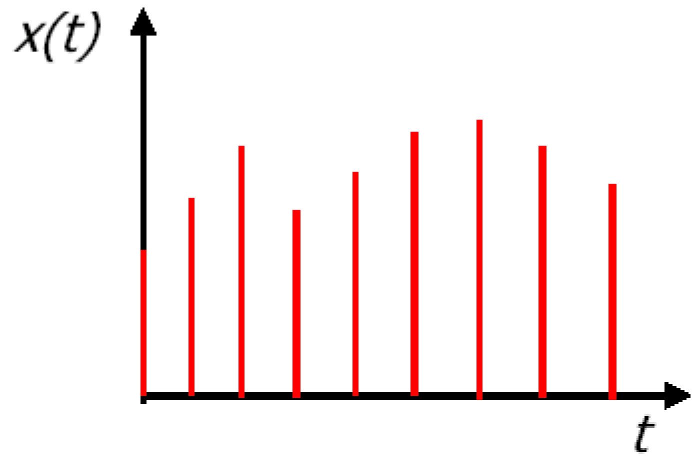
Intervallbreite: 10/8 = 1,25 Volt

2^2	2^1	2^0	
0	0	0	0
0	0	1	1,25
0	1	0	2,5
0	1	1	3,75
1	0	0	5
1	0	1	6,25
1	1	0	7,5
1	1	1	8,75

Beschreibung von Signalen (2)

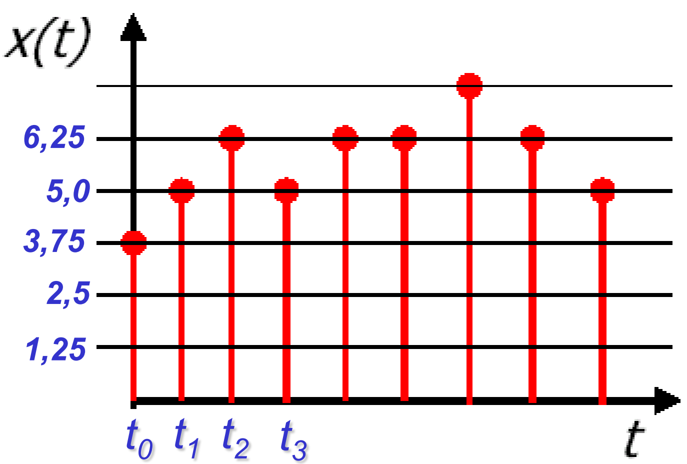
Definition: Zeitdiskretes Signal

Ein **zeitdiskretes Signal** kann nur zu bestimmten Zeitpunkten einen beliebigen Wert auf der Amplitudenachse annehmen.



Definition: Digitales Signal

Ein **digitales Signal** kann zu bestimmten Zeitpunkten nur einen quantisierten Amplitudenwert annehmen.



Definition: Deterministisches Signal

Ein **deterministisches Signal** lässt sich in seinem zeitlichen Verlauf mathematisch beschreiben und ist daher exakt bestimmbar.

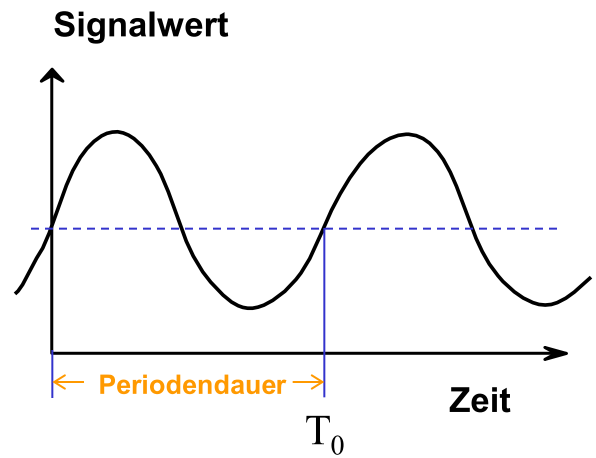
Definition: Periodisches Signal

Ein **periodisches Signal** wiederholt sich in gleichbleibenden Zeitintervallen T_0:

$$x(t) = x(t + k \cdot T_0)$$

mit k = 1, 2, 3, ...

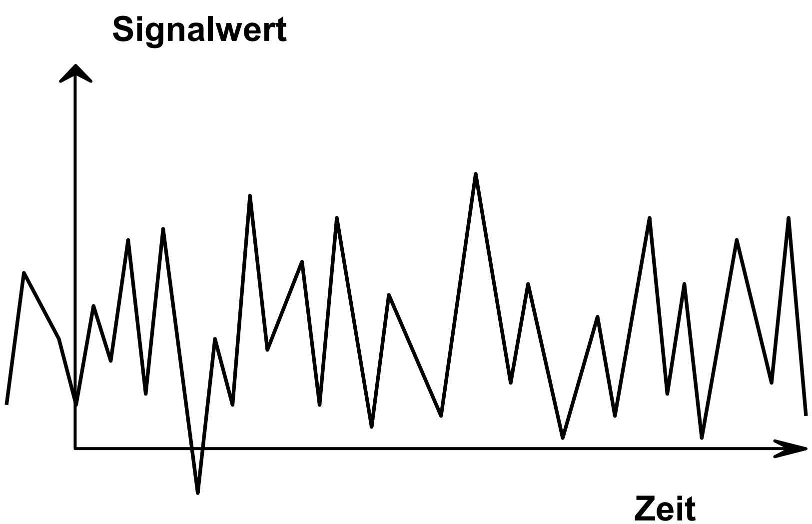
periodisch



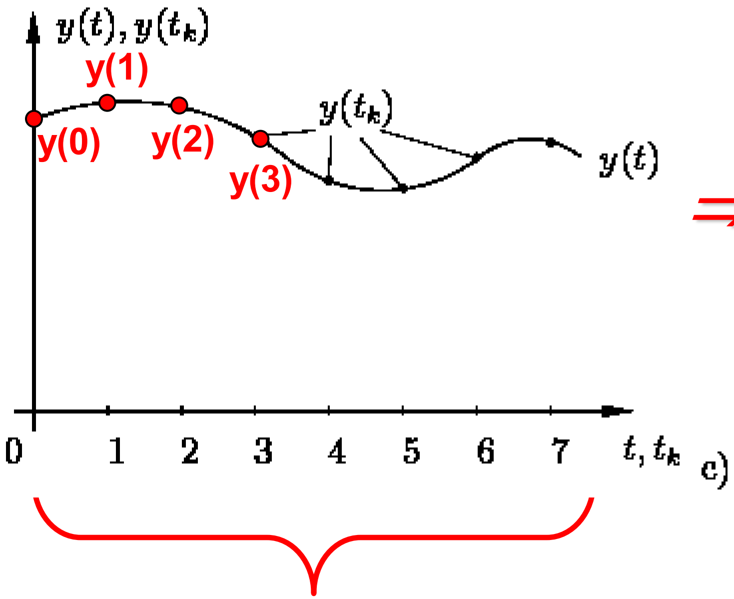
Beschreibung von Signalen (4)

Definition: Stochastisches Signal

Ein **stochastisches Signal** hängt in seinem zeitlichen Verlauf vom Zufall ab.



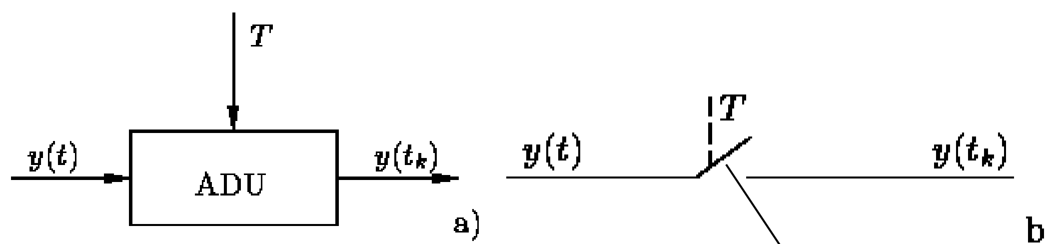
Ein **zeitdiskretes Signal** kann man aus einem kontinuierlichen Signal durch **Abtastung** gewinnen.



Periodische Abtastung

$\Rightarrow$

Durch Abtastung des kontinuierlichen Signals $y(t)$ zu den Zeitpunkten $t_0, t_1, t_2, \ldots$ erhält man das zeitdiskrete Signal oder die Abtastfolge $y(t_k) = y(t)|_{t=t_k}$.



idealer Taster

ADU: Analog-Digital-Umsetzer
T: Vorgegebener Takt

Analog-Digital-Umsetzer

- In einem A/D–Umsetzer wird ein kontinuierliches Signal zeitdiskretisiert und amplitudenquantisiert.
- Der Effekt der Amplitudenquantisierung ist bei hinreichend großer Auflösung für die Dynamik des Regelkreises vernachlässigbar.
- Im weiteren wird äquidistante Abtastung vorausgesetzt.
- Die Tastperiode T ist aber ein wesentlicher Analyse- und Syntheseparameter, der erheblichen Einfluss auf die Dynamik des Regelkreises hat.

Definition 2.4 Kontinuierliches System

In einem kontinuierlichen System sind die Eingangs– und Ausgangssignale sowie die Zustandsvariablen kontinuierliche Zeitfunktionen. Das dynamische Verhalten wird durch Dgln. beschrieben (Bild 2.4).

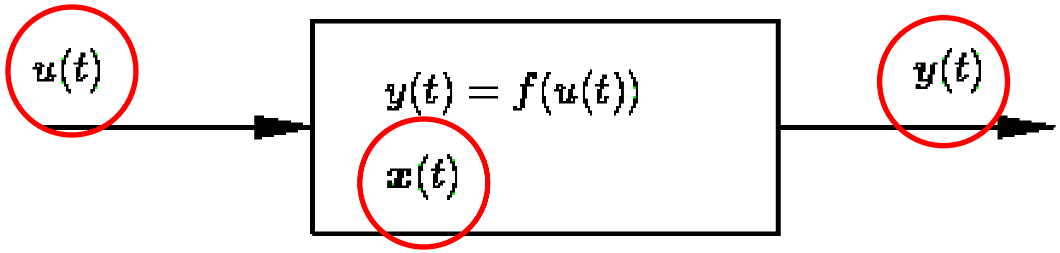


Bild 2.4: Blockbild eines kontinuierlichen Systems

Definition 2.5 Abtastsystem

Bei einem kontinuierlichen Abtastsystem sind die Zustandsvariablen kontinuierliche Funktionen, die Eingangs– und/oder Ausgangssignale diskrete Signale (Bild 2.5). □

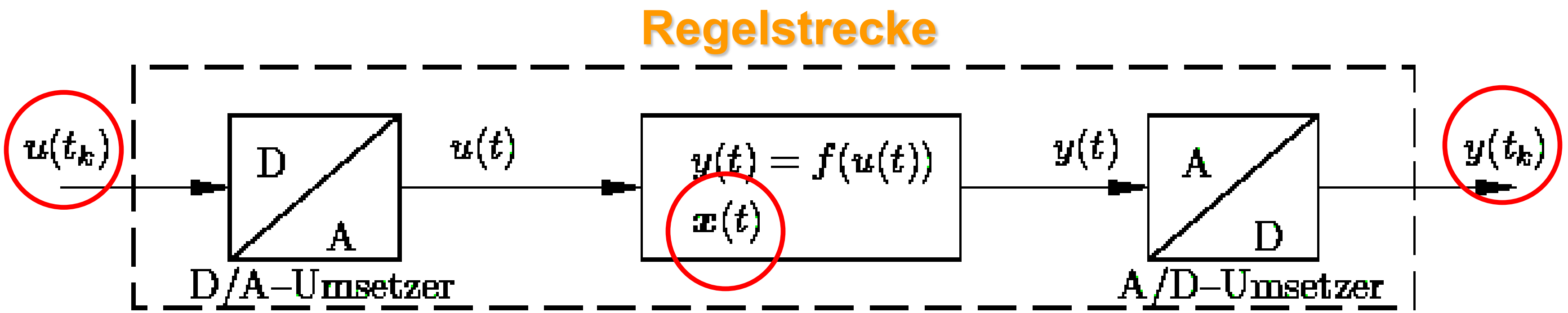


Bild 2.5: Blockschaltbild eines Abtastsystems

Beschreibung von Systemen (3)

Definition 2.6 Diskretes System

Bei einem diskreten System sind die Eingangs–, Ausgangs– und Zustandsvariablen diskrete Zeitfunktionen (Bild 2.6). □

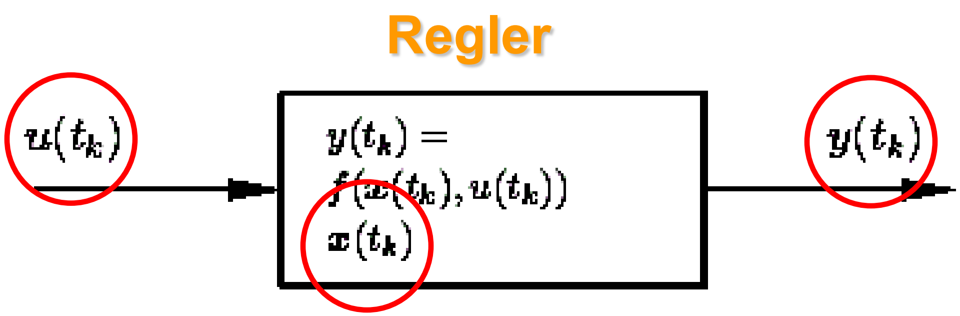


Bild 2.6: Zeitdiskretes System

Schreibweise diskreter Signale

Durch Abtastung des kontinuierlichen Signals $y(t)$ zu den Zeitpunkten $t_1, t_2, t_3,...$ erhält man das zeitdiskrete Signal oder die Abtastfolge $y(t_k) = y(t)|_{t=t_k}$.

Beispiel: y(0,5), y(0,7), y(0,8), ...

Wird eine äquidistante Abtastung mit dem Abtastintervall T vorgenommen, so kann man auch diese abgekürzte Schreibweise verwenden:

$$y_k = y(k) = y(kT) = y(t)|_{t=kT}.$$

Beispiel:

Für T=0,1 **bedeutet dies**

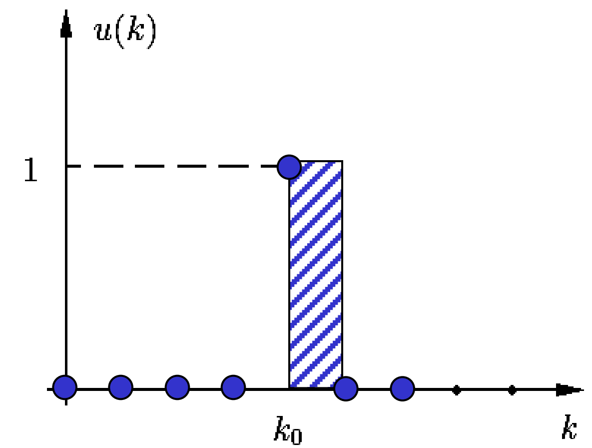
$$y_3 = y(3) = y(3T) = y(0,3)$$

Die Bezeichung y_k kann dabei sowohl für einen einzelnen Abtastwert als auch für eine ganze Abtastfolge stehen.

a) **Einheitsimpuls oder Impulsfolge**

Der **Einheitsimpuls** (Bild 2.12a)

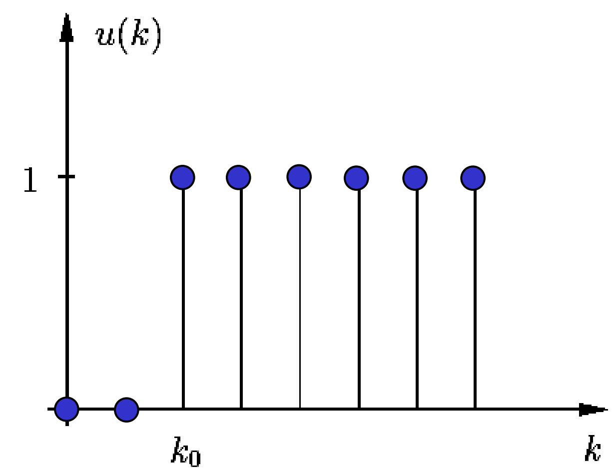
$$\delta(k-k_0) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k = k_0 \\ 0 & \text{für} \quad k \neq k_0 \end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots$$



b) **Einheitssprung oder Sprungfolge**

Der **Einheitssprung** (Bild 2.12b)

$$1(k-k_0) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k \geq k_0 \\ 0 & \text{für} \quad k < k_0 \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$



Energie- und Leistungssignale

Die Energie eines diskreten bzw. kontinuierlichen Signals ist definiert zu:

diskret:

$$E_X = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| x(k) \right|^2$$

kontinuierlich:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^2 dt$$

Energiesignale weisen eine endliche Energie auf.

Beispiel: Impulsfolge mit $E = 1$

Energie- und Leistungssignale (2)

Die Leistung eines diskreten bzw. kontinuierlichen Signals ist definiert zu:

diskret:

$$P_X = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} |x(k)|^2$$

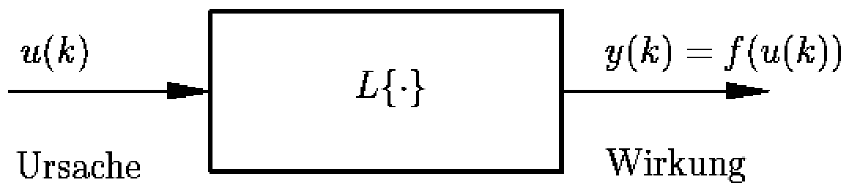
kontinuierlich:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$$

Leistungssignale weisen eine endliche Leistung auf.

Beispiel: Sprungfolge mit $P = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot n = 1/2$

Leistungssignale haben immer eine unendliche Energie !



Betrachtet werden lineare, zeitinvariante, kausale Systeme

Lineares System

Ein zeitdiskretes System ist **linear** wenn das Superpositionsprinzip gilt.

Beispiel:

$$y_1(k) + y_2(k) = f(u_1(k)) + f(u_2(k)) = f(u_1(k) + u_2(k))$$

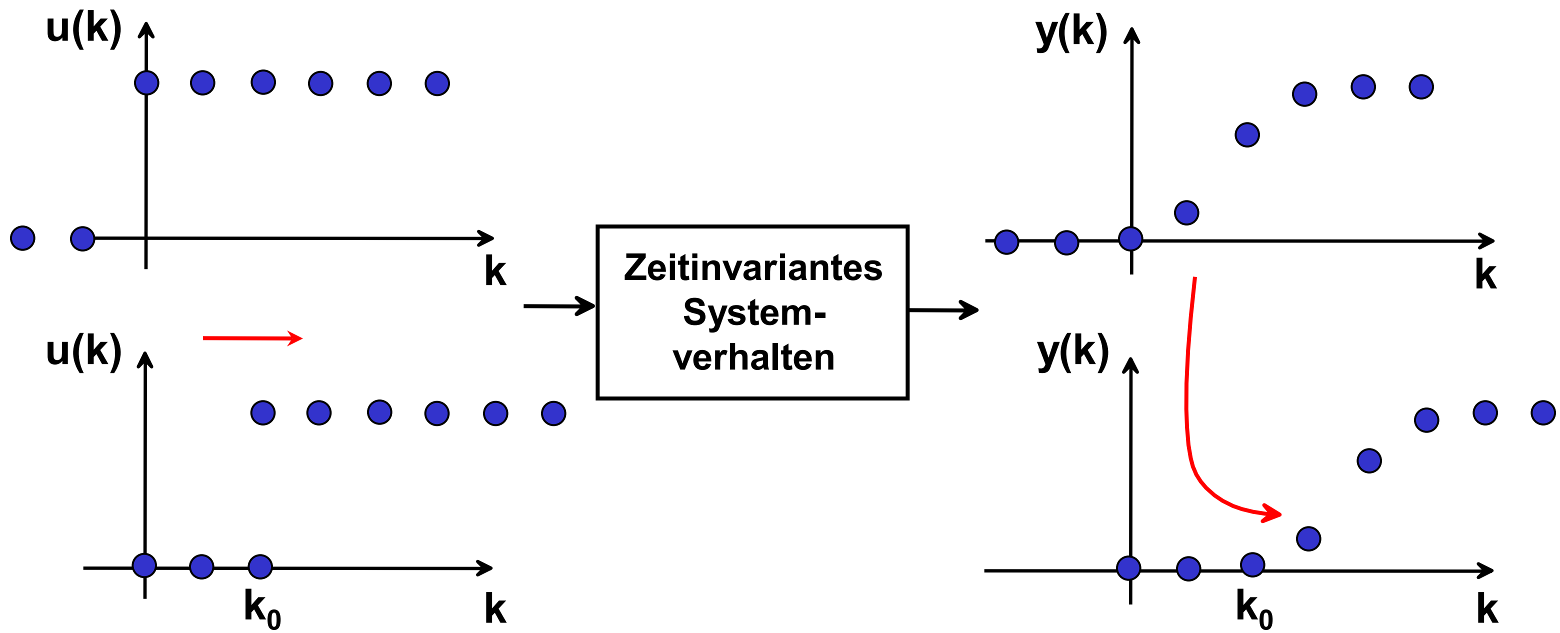
Kausalität

Ein System ist *Kausal*, wenn das Ausgangssignal $y(k)$ zu einem Zeitpunkt $k = k_0$ unabhängig von künftigen Werten des Eingangssignals $u(k)$ ist. Das bedeutet, die Antwort eines Systems erscheint bei Kausalität nicht vor der Erregung.

Eigenschaften diskreter Systeme (2)

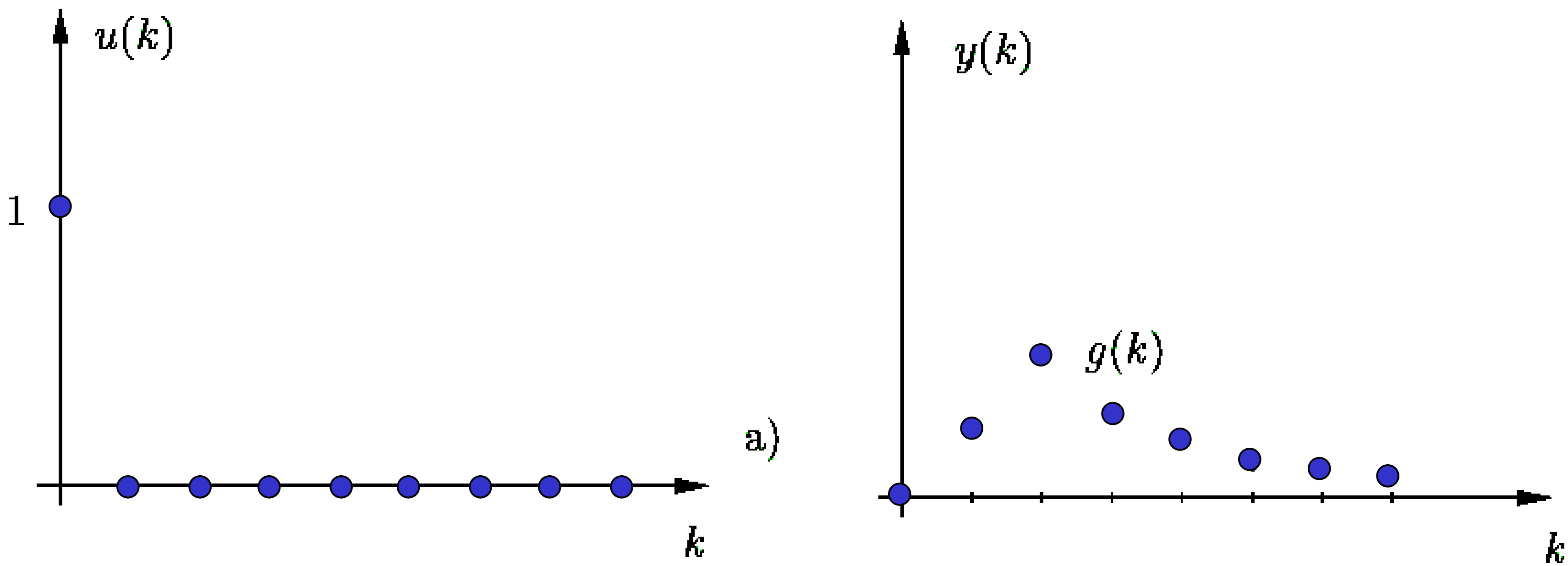
Zeitinvarianz

Ein zeitdiskretes System verhält sich **zeitinvariant**, wenn ein zeitverschobenes Eingangssignal $u(k - k_0)$ das zeitverschobene Ausgangssignal $y(k - k_0)$ erzeugt.



d) Beschreibung durch Gewichtsfolge

Genauso wie bei den kontinuierlichen Systemen läßt sich das Zeitverhalten diskreter Systeme durch die Impulsantwort oder Gewichtsfolge $g(k)$, der Antwort auf den Einheitsimpuls $\delta(k)$ beschreiben (Bild 2.14b).



Eigenschaften diskreter Systeme (4)

Faltungssummation

Die Antwort des linearen Systems mit der Gewichtsfolge $g(k)$ auf eine beliebige Eingangsfolge $u(k)$ kann mit der *Faltungssummation* bestimmt werden:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k} g(k-i)u(i) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.11)$$

$$\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Faltungsintegral

oder mit der Substitution $k - i = r$:

$$y(k) = \sum_{r=0}^{k} g(r)u(k-r) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.12)$$

$$\int_0^t g(\upsilon)u(t-\upsilon)d\upsilon$$

$$=: g(k) * u(k). \qquad (2.13)$$

e) Beschreibung durch Differenzengleichungen

Das Signalübertragungsverhalten zeitdiskreter Systeme kann analog zu der Vorgehensweise bei kontinuierlichen Systemen durch Gleichungen erfolgen, die Eingangs– und Ausgangsgröße verknüpfen. Waren dies bei kontinuierlichen Systemen *Differentialgleichungen*, so sind es bei diskreten Systemen **Differenzengleichungen**.

Beispiel:

$$T_1\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

PT_1-System

Approximation von dy(t)/dt durch den Differenzenquotienten:

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=kT} \approx \frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T} = \frac{y(k) - y(k-1)}{T}$$

T = Abtastintervall

Aus

$$T_1\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad T_1\frac{y(k)-y(k-1)}{T} + y(k) = u(k)$$

Beide Seiten mit T multiplizieren:

$$T_1(y(k)-y(k-1)) + Ty(k) = Tu(k)$$

$$(T_1 + T)y(k) - T_1y(k-1) = Tu(k)$$

Auflösen nach y(k):

$$y(k) = \frac{1}{T_1+T}(T_1y(k-1) + Tu(k))$$

$$= \frac{T_1}{T_1+T}y(k-1) + \frac{T}{T_1+T}u(k)$$

$$= -a_1y(k-1) + b_0u(k)$$

Eigenschaften diskreter Systeme (7)

Differenzengleichung eines zeitdiskreten Systems

$$\begin{aligned} y(k) \;&+\; a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) = \\ &= \; b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n) \quad ; \quad k = 1,2,3,\ldots \end{aligned} \tag{2.14}$$

mit den n Anfangsbedingungen:

$$y_0 = y(0)\;, \quad y(-1) = \cdots = y(-n+1) = 0 \tag{2.15}$$

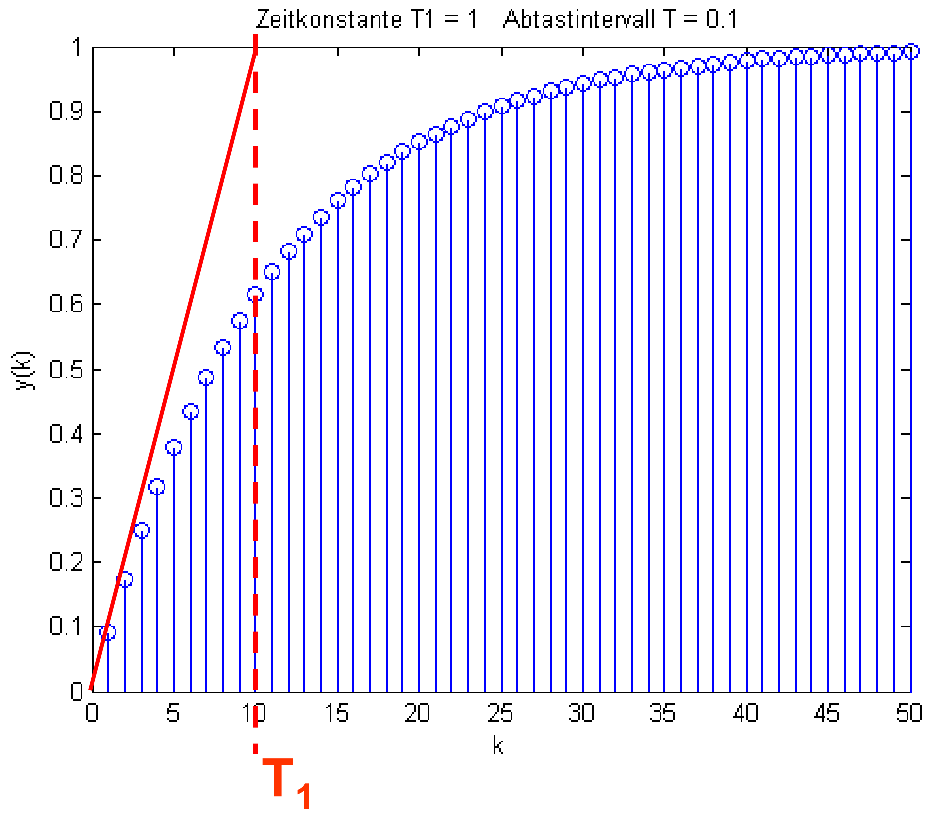
oder in kompakterer Notierung mittels Summenzeichen:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{n} b_j\, u(k-j) - \sum_{i=1}^{n} a_i\, y(k-i) \qquad , \qquad k = 1,2,3,\ldots \tag{2.16}$$

Differenzengleichungen stellen einen Rekursionsalgorithmus dar, der mit einem Digitalrechner schrittweise gelöst werden kann.

Eigenschaften diskreter Systeme (8)

```
% Sprungantwort für die Differenzengleichung 1. Ordnung
%   y(k) = -a1 * y(k-1) + b0 * u(k)
% als Approximation der DGL
%   T1 * dy(t)/dt + y(t) = u(t)
%
T1 = 1;
T = 0.1;
a1 = -T1/(T1+T)
b0 = T/(T1+T)
%
uk = 1;
%
% Anfangsbedingung y(0) = 0
%
y0 = 0;
%
% Berechnung der Ausgangsfolge für k = 1
%
y(1) = -a1 * y0 + b0 *uk;
for i=2:100
    y(i) = -a1 * y(i-1) + b0 * uk;
end
%
% Graphische Darstellung der Ausgangsfolge
%
stem(y(1:50))
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
title(['Zeitkonstante T1 = ', num2str(T1),'   Abtastintervall T = ' num2str(T)])
```



Eigenschaften diskreter Systeme (9)

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$y(k) = \frac{T_1}{T_1 + T} y(k-1) + \frac{T}{T_1 + T} u(k)$$