

- **Steuer- und Erreichbarkeit zeitdiskreter Systeme**
- Bei zeitdiskreten Systemen sind Steuer- und Erreichbarkeit keine äquivalente Eigenschaften.
- Die Erfüllung des Kalmankriteriums ist notwendig **und** hinreichend für die Erreichbarkeit.
- Jedes vollständig erreichbare zeitdiskrete System (A,b) ist **auch** vollständig steuerbar.
- Die Umkehrung gilt nur, wenn die Systemmatrix A **regulär** ist (keine Eigenwerte bei 0 hat).
- Die Erfüllung des Kalmankriteriums ist zwar hinreichend **aber nicht** notwendig für die Steuerbarkeit.



- **Beobachtbarkeit und Rekonstruierbarkeit zeitdiskreter Systeme**
- Bei zeitdiskreten Systemen sind Beobachtbarkeit und Rekonstruierbarkeit keine äquivalente Eigenschaften.
 - Die Erfüllung des Kalmankriteriums ist notwendig **und** hinreichend für die Beobachtbarkeit.
 - Jedes vollständig beobachtbare zeitdiskrete System (A,c) ist **auch** vollständig rekonstruierbar.
 - Die Umkehrung gilt nur, wenn die Systemmatrix A **regulär** ist (keine Eigenwerte bei 0 hat).
 - Die Erfüllung des Kalmankriteriums ist zwar hinreichend **aber nicht** notwendig für die Rekonstruierbarkeit.



➤ **Steuer- und Beobachtbarkeit des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems**

- Durch Abtastung kann die vollständige Steuer- und Beobachtbarkeit eines kontinuierlichen Systems verloren gehen.
- Sei das kontinuierliche System vollständig steuer- und beobachtbar. Dann ist das zugehörige Abtastsystem genau dann vollständig steuer- und beobachtbar, wenn für zwei verschiedene Eigenwerte λ_i und λ_j ($\lambda_i \neq \lambda_j$) der Matrix A die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$e^{\lambda_i T} \neq e^{\lambda_j T}$$



Quasikontinuierliche digitale Regelung

Voraussetzung:

Die Abtastzeit ist wesentlich kleiner als die maßgebenden Zeitkonstanten des Regelkreises:

- **Unbehauen:** Abtastzeit kleiner als $1/10$ der dominierenden Zeitkonstante des Systems.
- **Braun:** Abtastrate = 20fache der Bandbreite des geschlossenen Regelkreises.
- **Lunze:** Abtastrate 6 – 20fache der größten im Regelkreis auftretenden Frequenz (Führungssignal, Störungen, Bandbreite der Regelstrecke).



Quasikontinuierliche digitale Regelung

Ist die Bedingung an die Abtastzeit erfüllt, so kann der Regler als kontinuierlicher Regler entworfen und dann als zeitdiskreter Regler realisiert werden.

Vorteile:

- Der Regler kann mit Hilfe bekannter Methoden für kontinuierliche Systeme entworfen werden.
- Man erfährt, welche Regelgüte prinzipiell mit einer kontinuierlichen Regelung erreicht werden kann.

Nachteil:

- Der Regelkreis wird weniger gedämpft sein, da der digitale Regler eine zusätzliche Phasenverschiebung einbringt.



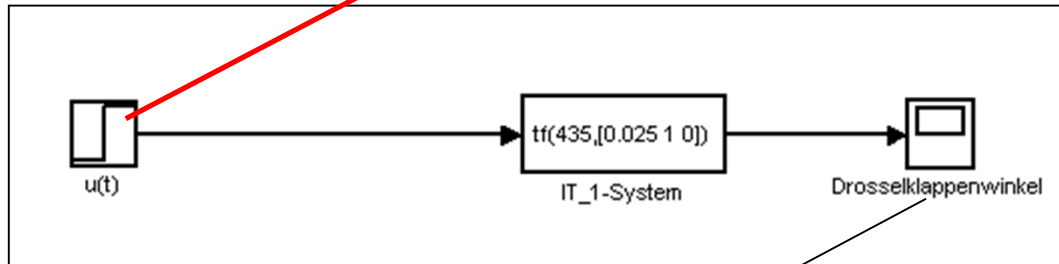
Simulation mit Simulink

Fall: $u_2(t) = 3,6$ (Volt)



IT₁-System:

$$G(s) = \frac{K_I}{s} \frac{1}{1 + T_1 s}$$



mit

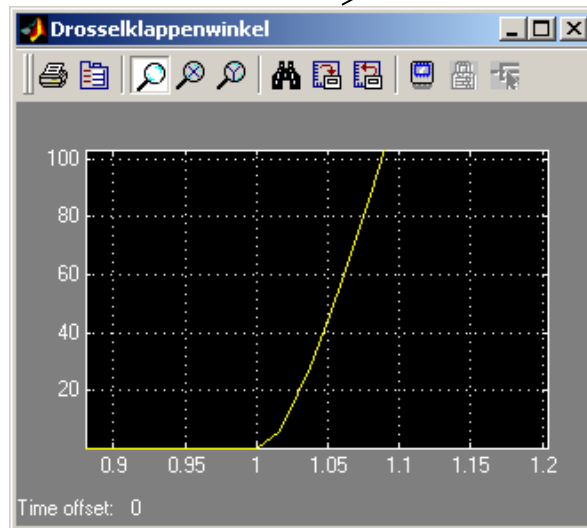
$$T_1 = 0,025 \text{ s}$$

$$K_I = 435 \text{ Grad/s}$$



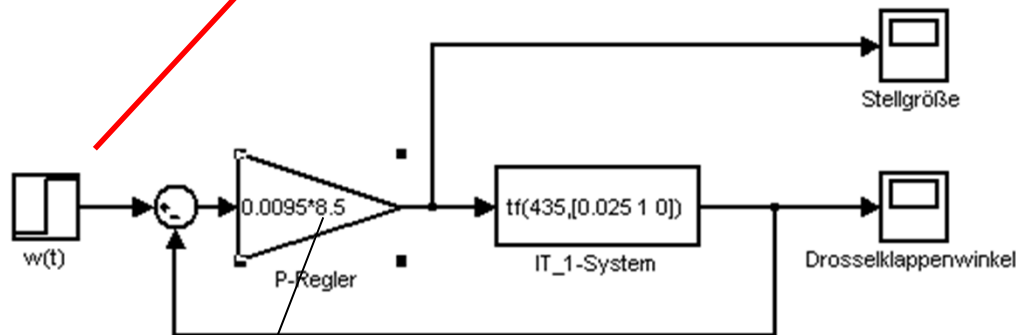
$$G(s) = \frac{435}{s} \frac{1}{1 + 0,025s}$$

$$= \frac{435}{0,025s^2 + s}$$



Kontinuierliche Regelung

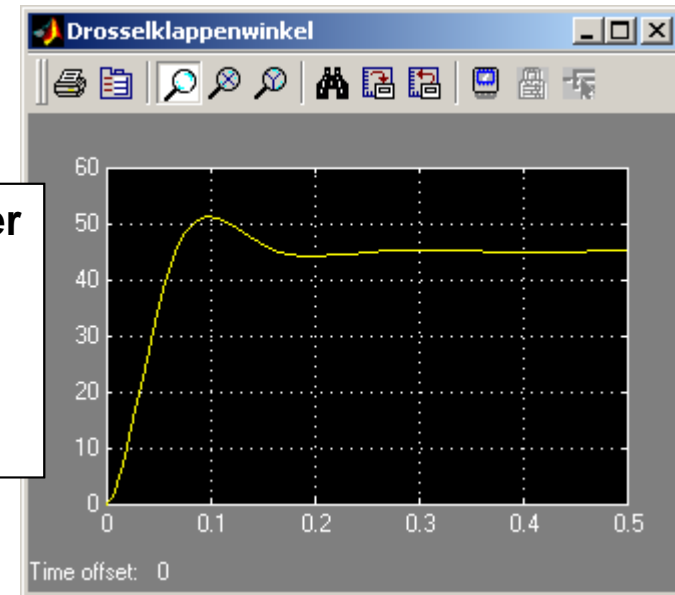
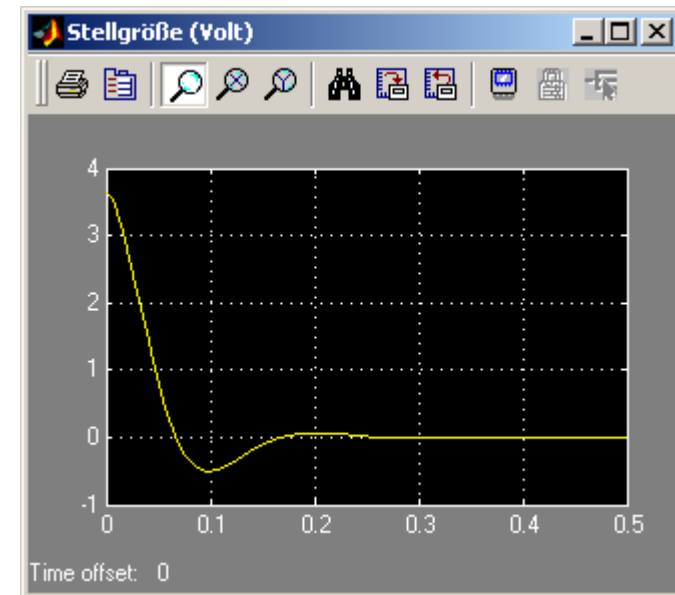
Fall: $w(t) = 45^\circ$ mit P-Regler



Umrechnung
in Volt



1. Der lineare Regelkreis ist schwächer gedämpft als der reale, nichtlineare Regelkreis.
2. Der lineare Regelkreis reagiert langsamer als der reale Regelkreis.



Digitale Regelung

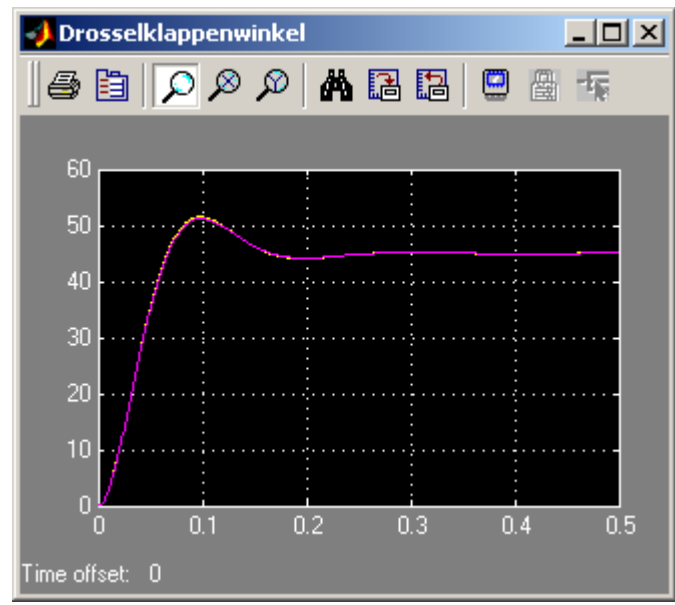
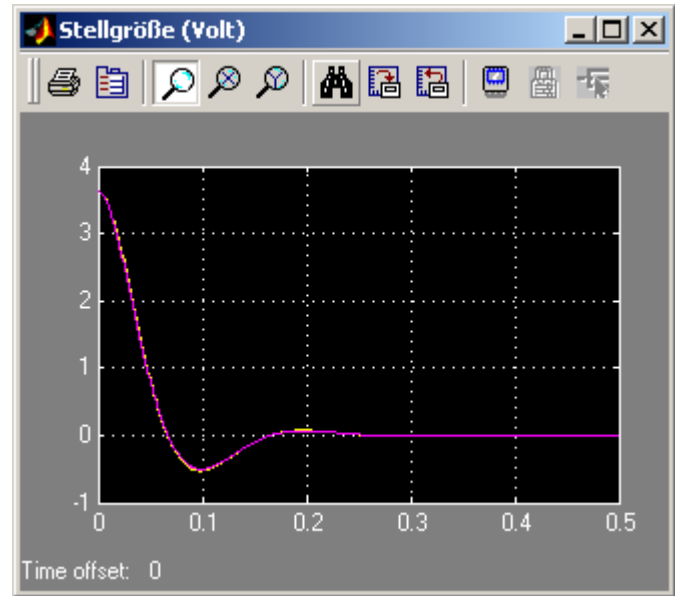
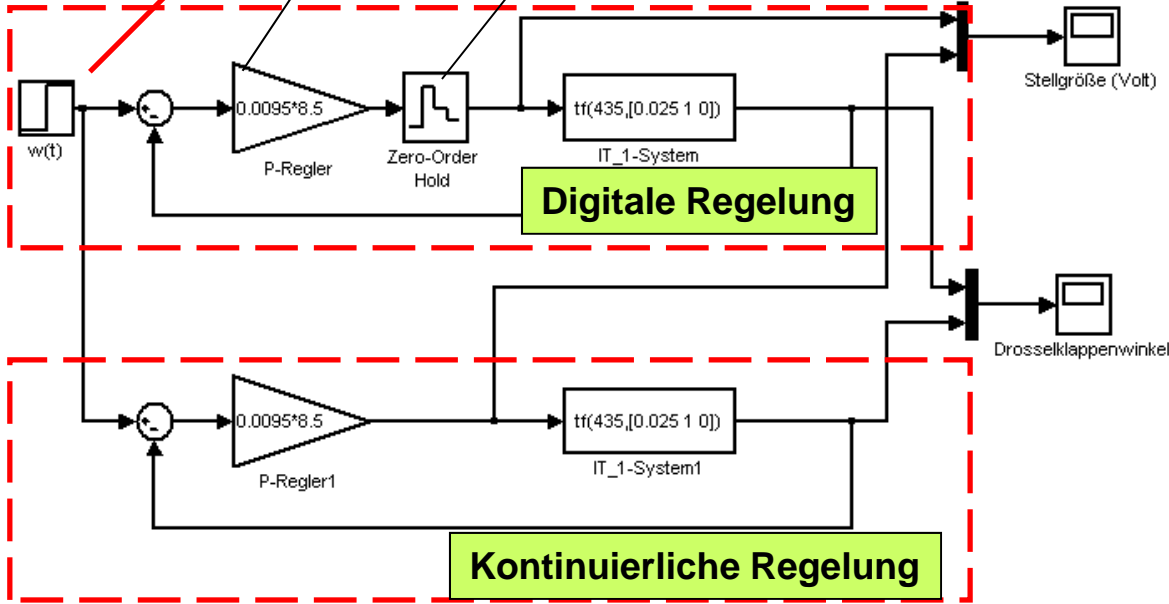


Digitale Regelung

Fall: $w(t) = 45^\circ$ mit P-Regler

$$\frac{T_1}{T} = 25$$

Keine Verzögerung im Regler
 Halteglied der Ordnung Null ($T=0,001$)



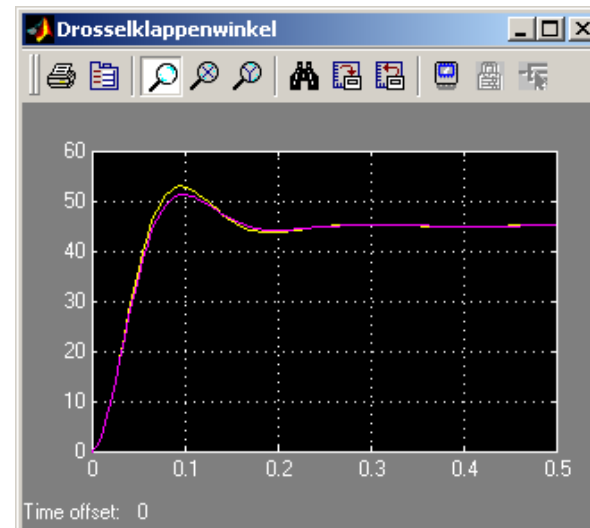
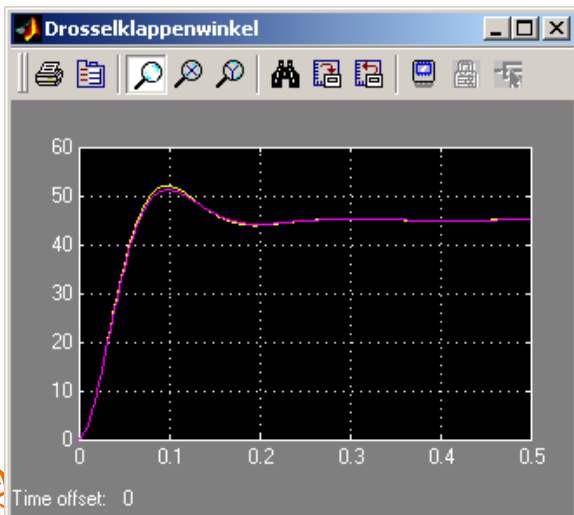
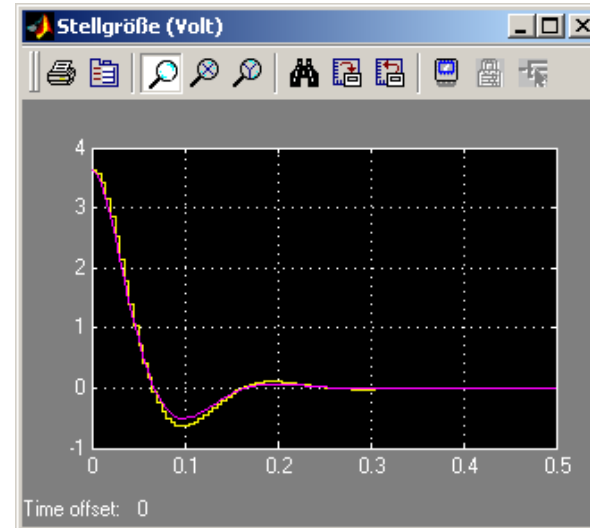
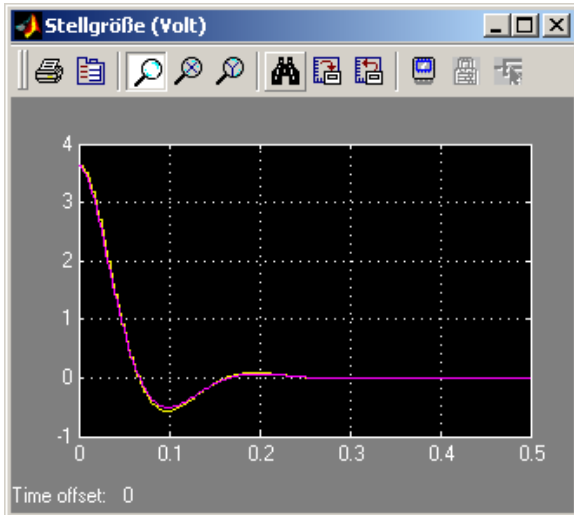
Digitale Regelung



Abtastzeit $T = 0,0025$

Abtastzeit $T = 0,005$

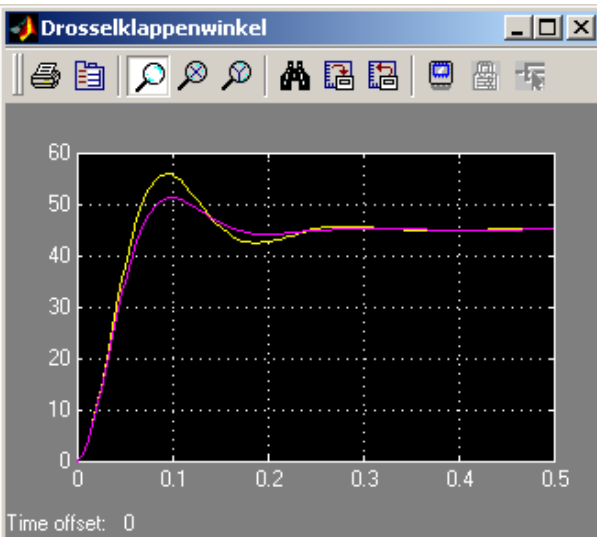
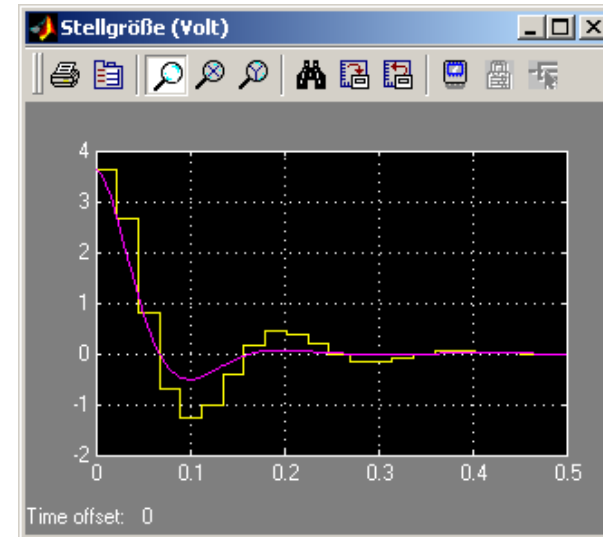
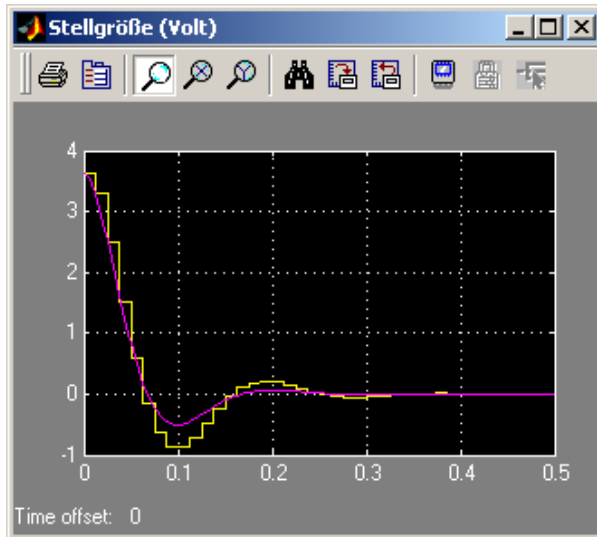
$$\frac{T_1}{T} = 10$$



Abtastzeit $T = 0,0125$

Abtastzeit $T = 0,025$

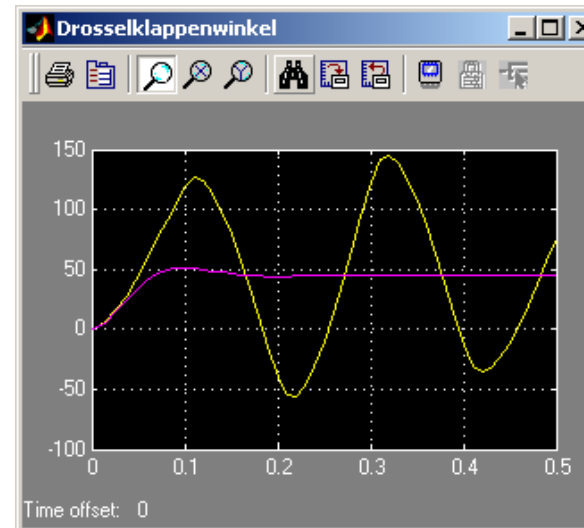
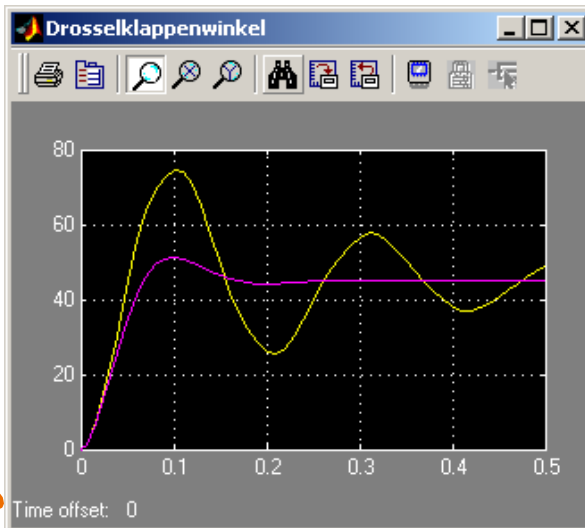
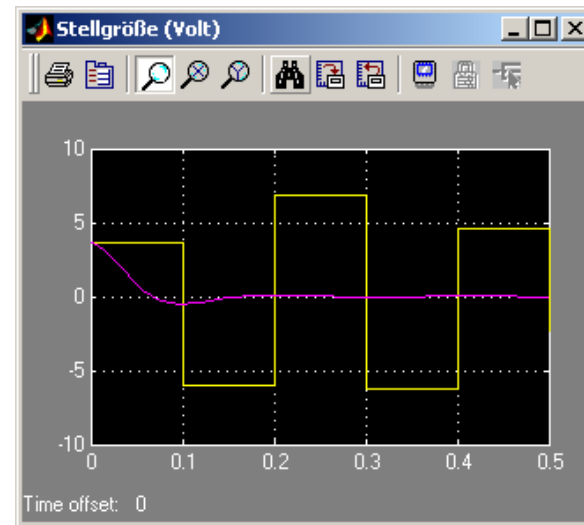
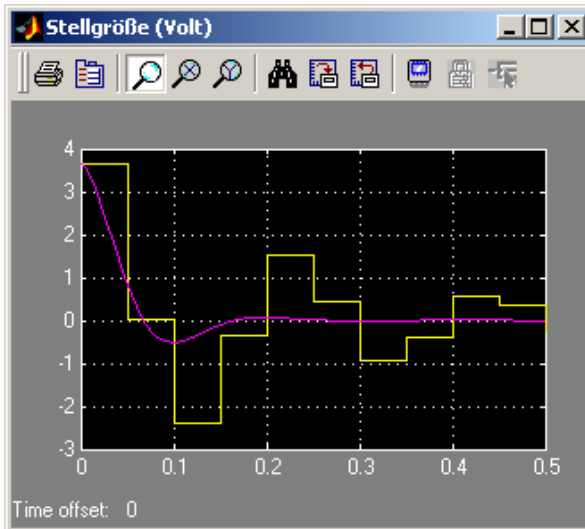
$$\frac{T_1}{T} = 2$$



Abtastzeit $T = 0,05$

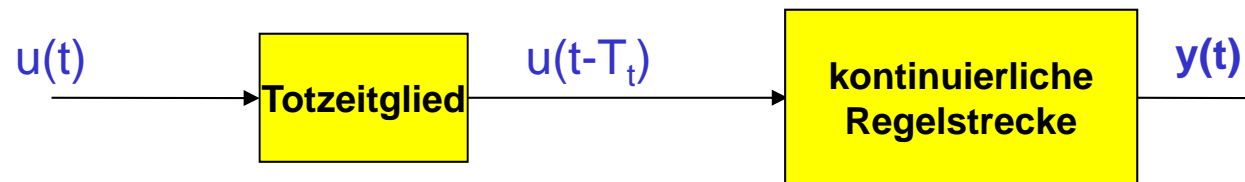
Abtastzeit $T = 0,1$

$$\frac{T_1}{T} = 0,5$$



Einfluß von Abtaster und Halteglied auf die Stabilität des Regelkreises

Approximation von Abtaster und Halteglied durch kontinuierliches Totzeitglied:

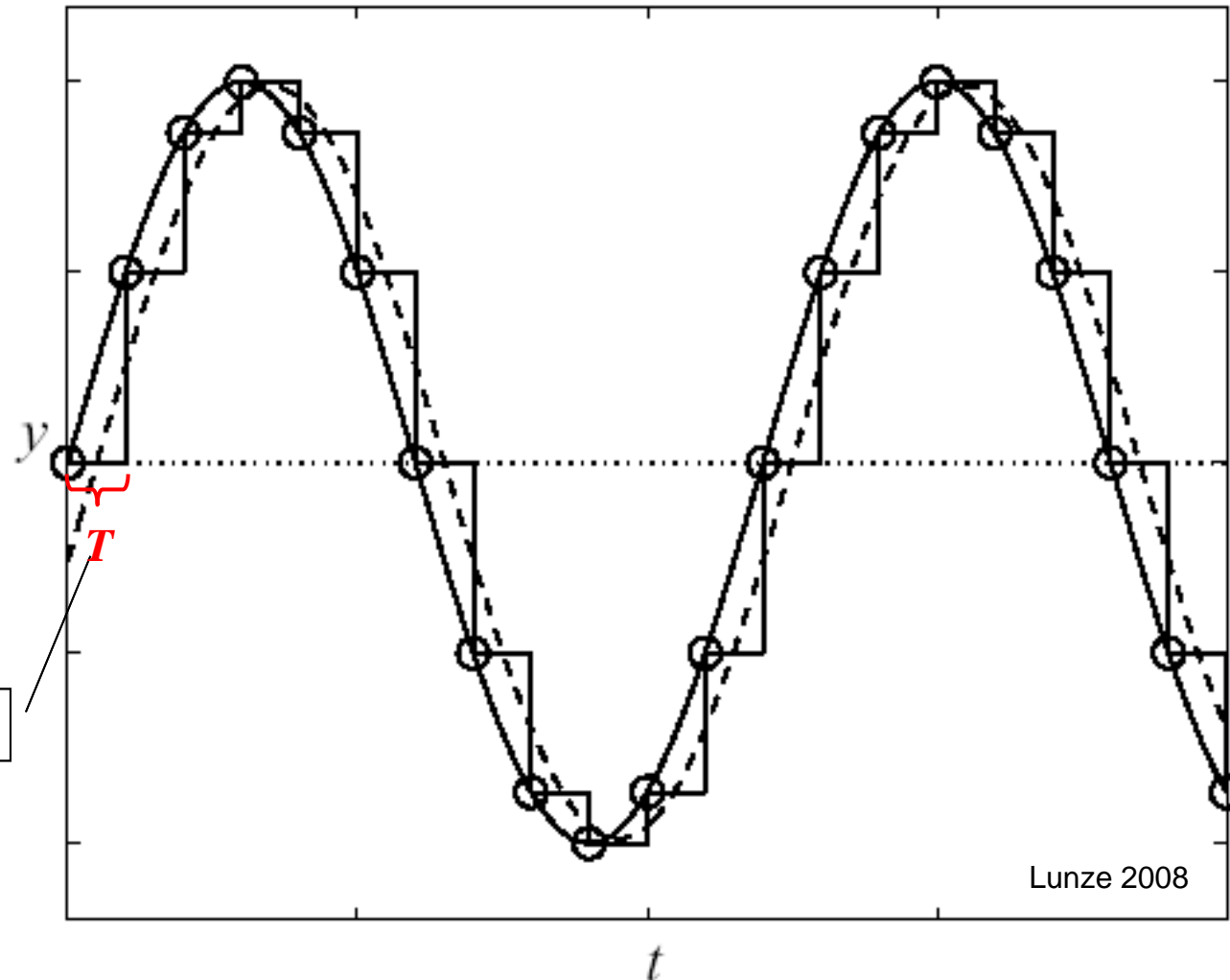


Für kleine Abtastzeiten T kann man $T_t = T/2$ setzen.

Betrachtung des Einflusses des Totzeitgliedes auf den Phasenrand.



Wirkung des Haltegliedes 0-ter Ordnung bei einem sinusförmigen Eingangssignal



Abtastzeit

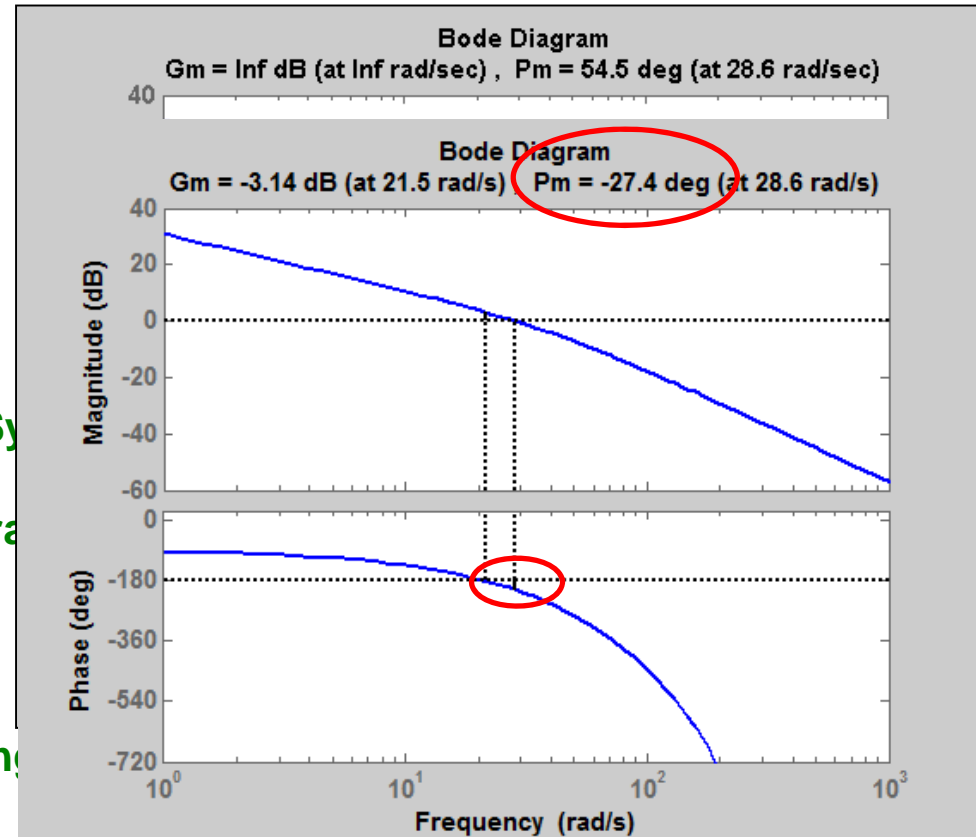
Lunze 2008



```

%
% Approximation des Einflusses von Abtaster und Halteglied durch Totzeitglied
%
s = tf('s');
%
K_I = 435;
T_1 = 0.025;
G_s = K_I/s*(1/(1+T_1*s)); %Strecke
%
K_R = 0.0095 * 8.5; % P-Regler
G_0 = K_R * G_s % Üfkt. des offenen Sy
figure(1)
margin(G_0) % Amplituden- und Phasenra
%
T = 0.1; % Abtastzeit
T_t = T/2; % Totzeit
set(G_s,'Inputdelay',T_t) % Totzeit am Ein
%
figure(2)
margin(G_0) % Amplituden- und Phasenrand von G_o(s) mit Totzeit

```



Zusammenfassung:

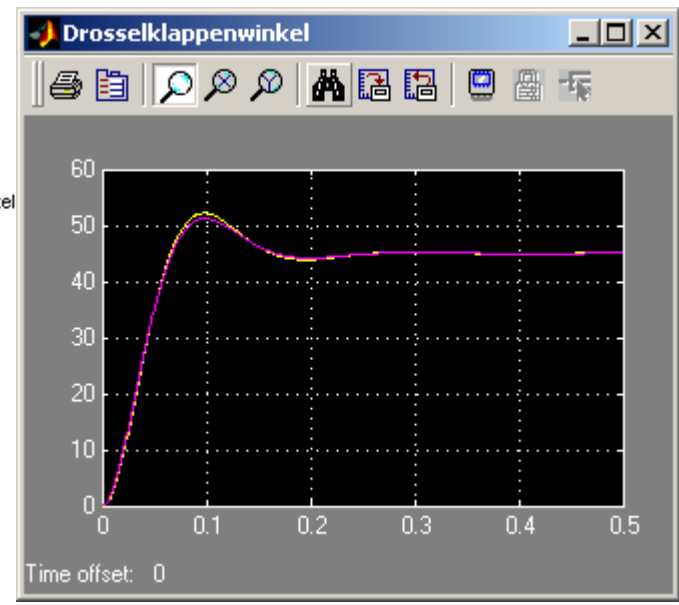
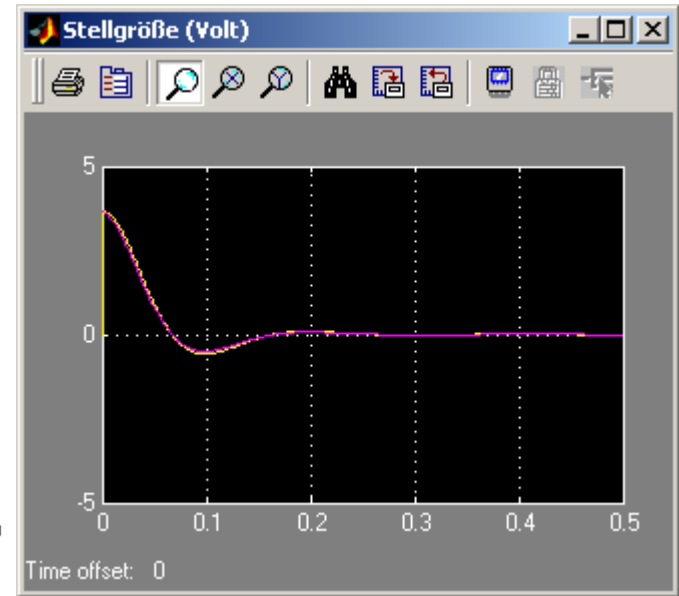
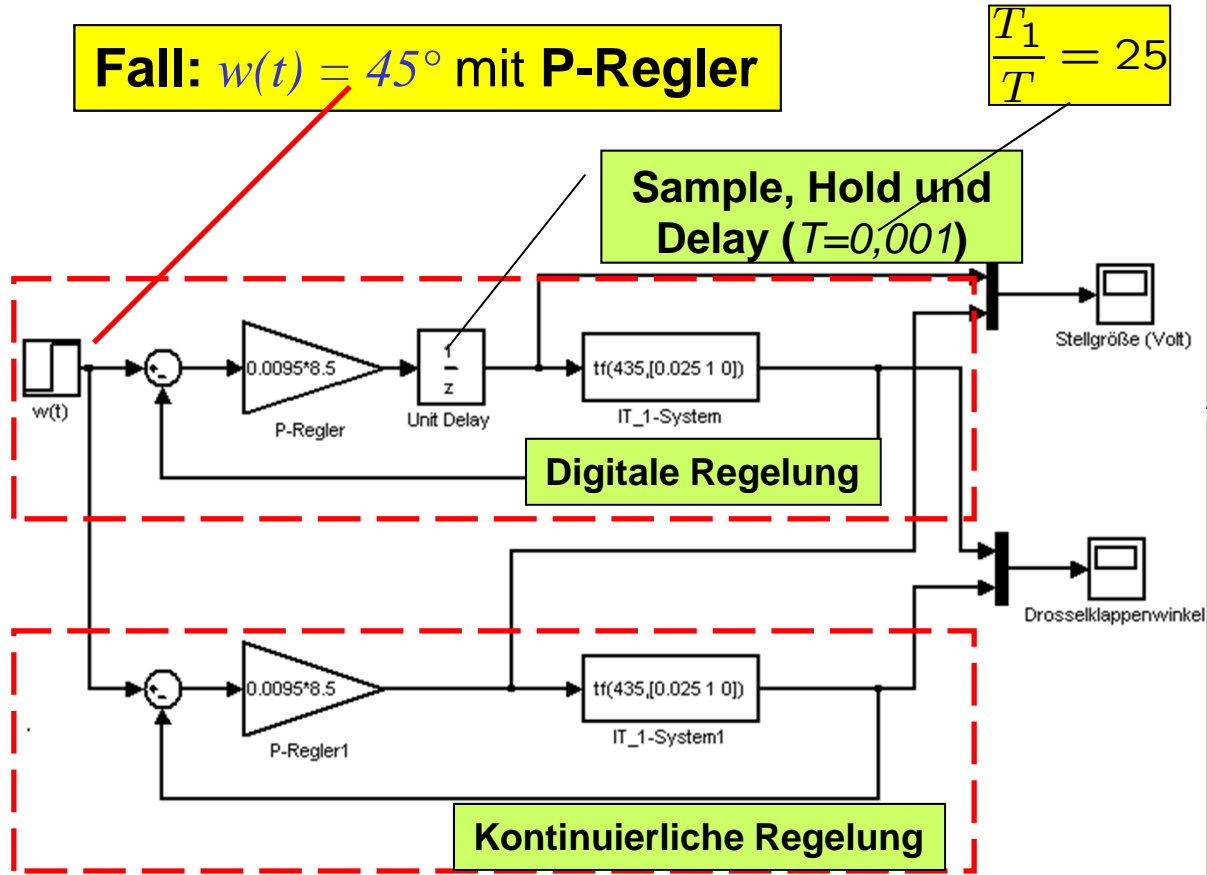
- Der zeitdiskrete Regelkreis kann schwächer gedämpft sein als der kontinuierliche Regelkreis.
- Der zeitdiskrete Regelkreis kann langsamer sein als der kontinuierliche Regelkreis.
- Der zeitdiskrete Regelkreis wird für zu große Abtastzeiten immer instabil.
- Für die Stabilität des zeitdiskreten Regelkreises ist es **notwendig**, aber nicht hinreichend, dass der kontinuierliche Regelkreis stabil ist.



Digitale Regelung

Fall: $w(t) = 45^\circ$ mit P-Regler

$$\frac{T_1}{T} = 25$$



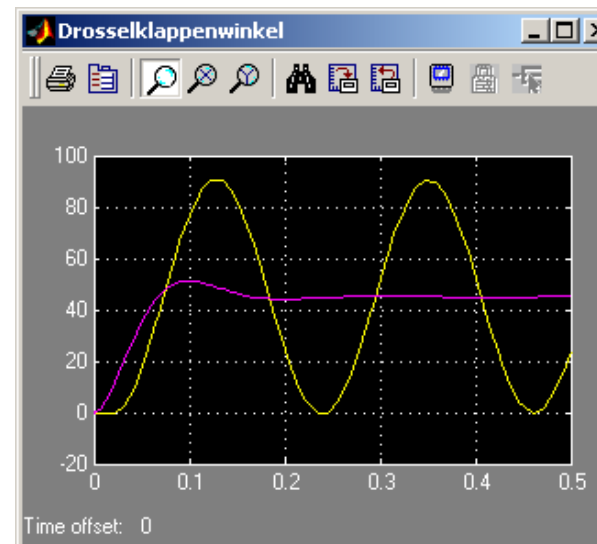
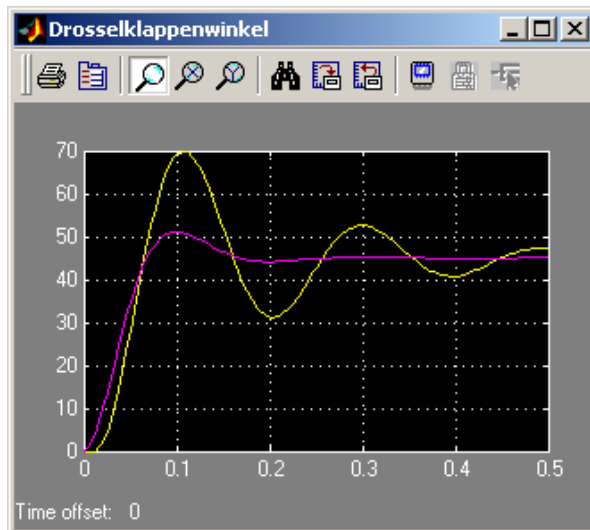
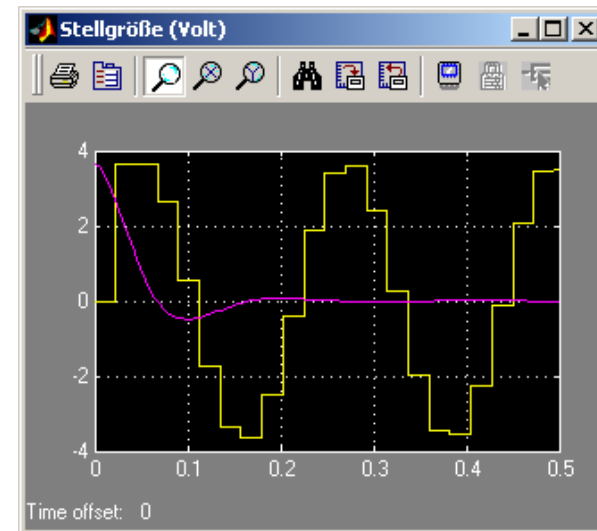
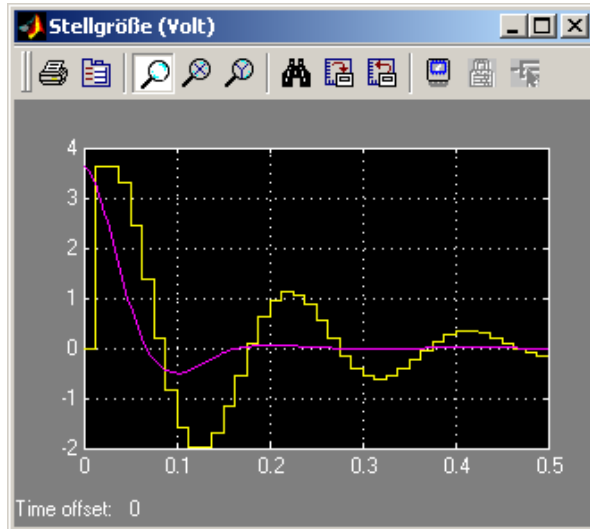
Digitale Regelung



Abtastzeit $T = 0,0125$

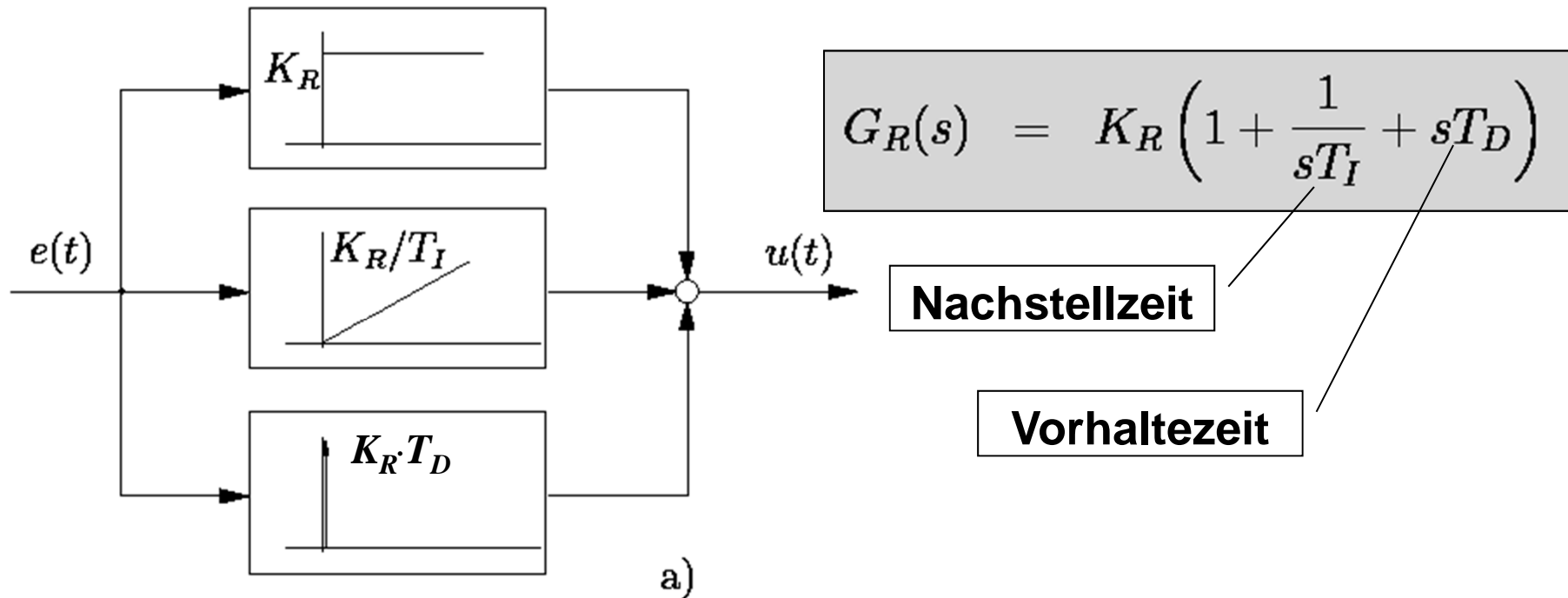
Abtastzeit $T = 0,0225$

$$\frac{T_1}{T} = 2$$



ISR Quasikontinuierliche Realisierung von PID-Reglern

Blockschaltbild des kontinuierlichen PID-Reglers

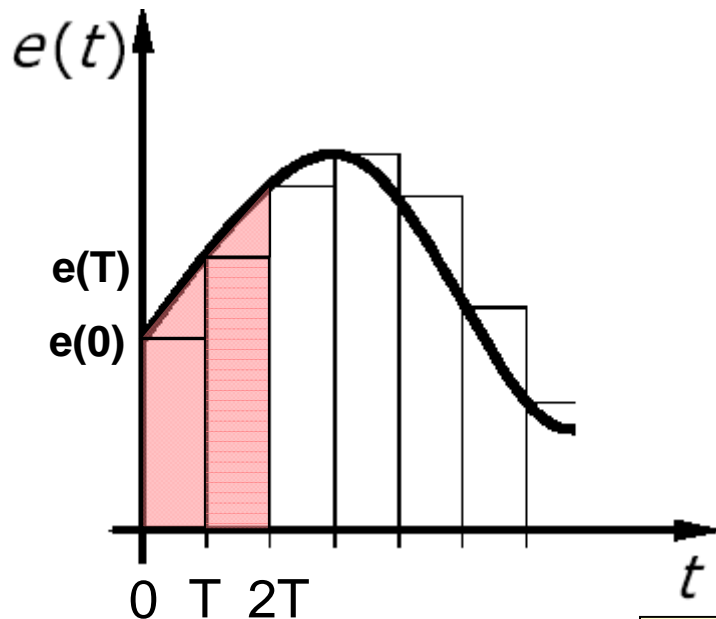


P-Glied: $u(t) = K_r \cdot e(t)$ \Rightarrow $u(k) = K_r \cdot e(k)$



I-Glied: $u(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau$

Approximation der Integration mit Hilfe der Trapezregel



$$u(0) = 0$$

$$u(T) = \frac{1}{T_I} (e(0)T) + \frac{e(T) - e(0)}{2} T$$

$$= \frac{T}{T_I} \left(\frac{e(0)}{2} + \frac{e(T)}{2} \right)$$

$$u(2T) = u(T) + \frac{T}{T_I} \left(\frac{e(T)}{2} + \frac{e(2T)}{2} \right)$$



$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2T_I} (e(k-1) + e(k))$$



Bestimmung der z-Übertragungsfunktion aus der Differenzgleichung des I-Gliedes

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2T_I}(e(k-1) + e(k))$$

Anwendung des Rechtsverschiebungssatzes

$$f(k-i) \quad \circ \text{---} \bullet \quad z^{-i}F(z)$$

$$U(z) - \frac{1}{z}U(z) = \frac{T}{2T_I} \left[\frac{1}{z}E(z) + E(z) \right]$$

$$U(z) \frac{z-1}{z} = \frac{T}{2T_I} E(z) \frac{z+1}{z}$$

z-Übertragungsfunktion des I-Gliedes für Trapez-Approximation

$$G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2T_I} \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

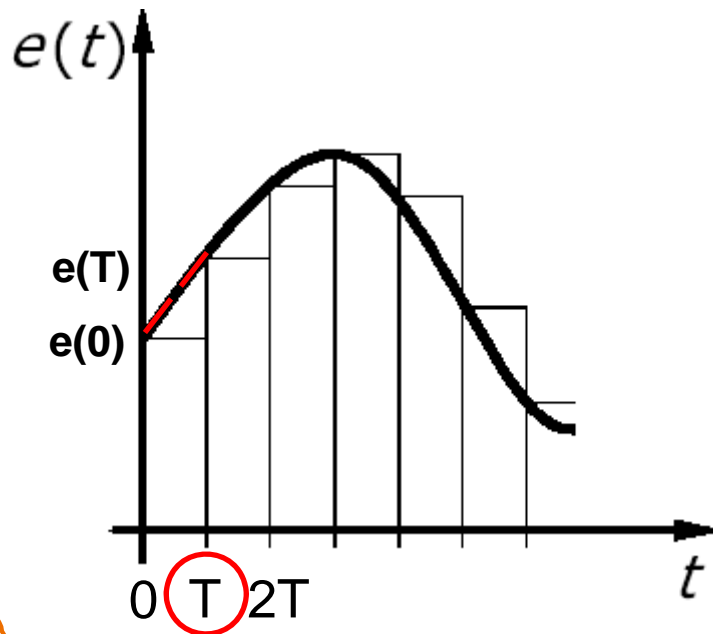


D-Glied: $u(t) = T_D \dot{e}(t)$

Approximation des Differentialquotienten

$$\dot{e}(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

durch Differenzenquotienten



$$\Delta e(k) = \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

$$u(k) = T_D \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

$$U(z) = \frac{T_D}{T} (1 - z^{-1}) E(z)$$

$$G_D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T_D}{T} (1 - z^{-1})$$

$$G_D(z) = \frac{T_D}{T} \cdot \frac{z-1}{z}$$



Vergleich kontinuierliches und diskretes D-Glied**Kontinuierliche Systeme**

$$G_D(s) = T_D s$$

- Phasenhebung von 90° .
- Wirkt stabilisierend.
- Kann technisch nicht realisiert werden.

Zeitdiskrete Systeme

$$G_D(z) = \frac{T_D}{T} \cdot \frac{z - 1}{z}$$

- Parameter ist von der Abtastzeit abhängig.
- Pol im Ursprung. \Rightarrow
- Phasennacheilung.
- Kann technisch realisiert werden.



Digitaler PID-Regler

$$G_{PID}(z) = K_R + \frac{K_R T}{2T_I} \cdot \frac{z+1}{z-1} + \frac{K_R T_D}{T} \cdot \frac{z-1}{z}$$



$$G_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{d_2 z^2 + d_1 z + d_0}{z(z-1)}$$

mit

$$d_2 = K_R \left(1 + \frac{T}{2T_I} + \frac{T_D}{T} \right)$$

$$d_1 = K_R \left(-1 + \frac{T}{2T_I} - \frac{2T_D}{T} \right)$$

$$d_0 = \frac{K_R T_D}{T}$$



Realisierung des digitalen PID-Reglers

$$z(z-1)U(z) = (d_2z^2 + d_1z + d_0)E(z) \quad \cdot \frac{1}{z^2}$$



$$\left(1 - \frac{1}{z}\right)U(z) = \left(d_2 + d_1\frac{1}{z} + d_0\frac{1}{z^2}\right)E(z)$$

Anwendung des Rechtsverschiebungssatzes

$$f(k-i) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad z^{-i}F(z)$$

$$u(k) = u(k-1) + d_2e(k) + d_1e(k-1) + d_0e(k-2)$$

