

- Die reale Welt ist überwiegend analog und kontinuierlich.
- Die meisten Regler werden aber inzwischen mit Hilfe von Computern realisiert, die nur **zeitdiskrete** und **amplitudenquantisierte** Signale verarbeiten können.
- Einfache Realisierung komplexer Regelungs-, Steuerungs- und Überwachungsalgorithmen.
- Realisierung in Software anstatt Hardware ist kostengünstiger.
- Flexibilität (einfache Anpassung und Änderung der Algorithmen).
- Kürzere Entwicklungszeiten (Rapid Prototyping).



- Die Vorlesung **Digitale Regelung** befasst sich mit den Grundlagen der **Regelung zeitabgetasteter Systeme** (Synonyme: **zeitdiskrete Regelung** oder **Abtastregelung**).
- Die **digitale Regelungstechnik** befasst sich mit der Analyse und der Synthese zeitdiskreter Regelkreise.
- Sowohl in modernen **Kraftfahrzeugen** als auch in modernen **Flugzeugen** werden Steuerungen und Regelungen heutzutage überwiegend digital realisiert.

➤ Steuer- und Regelungstechnik

- Gewichts- und Übergangsfunktion, Übertragungsfunktion, Pole und Nullstellen, Stabilität, PT_1 , PT_2, \dots , Zustandsraummodelle, ...

➤ Grundlagen der Messtechnik

- Analog-/Digital-Umsetzer
- Fourier-Transformation
- Spektralanalyse

➤ Mathematik

- Komplexe Zahlen
- Laplace-Transformation
- Matrizenrechnung



- **Diskrete Signale und Systeme**
 - Signalarten, Quantisierung, Periodische Signalabtastung, Halteglieder, Impulsfolge, Sprungfolge
- **Beschreibung von dynamischen Systemen im Zeitbereich durch Differenzengleichungen**
- **Spektrum diskreter Signale**
- **Abtasttheorem**
- **Frequenzfaltung, Aliasing**

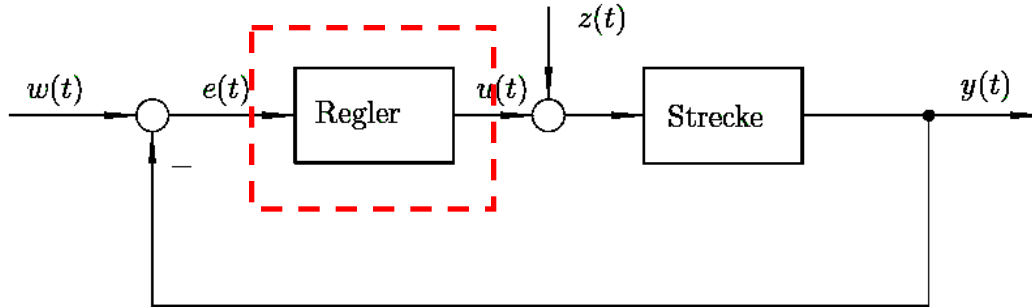


- **Beschreibung von dynamischen Systemen im Frequenzbereich durch die z-Transformation**
 - Vergleich mit dem s-Bereich
 - z-Übertragungsfunktion
 - Pole und Nullstellen
- **Zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung**
- **Stabilität zeitdiskreter Systeme**
- **Entwurf digitaler Regler**

Die Entwicklung der digitalen Signalverarbeitung und der Regelungstechnik ist eng mit der technischen Entwicklung der Digitalrechner verknüpft.

- 1954** Hughes Aircraft Company setzt erstmals einen Digitalrechner zur Überwachung eines Autopiloten ein.
- 1958** Louisiana Power & Light Company setzt erstmals einen Digitalrechner zur Überwachung eines Kraftwerks ein.
- 1959** Imperial Chemical Industries (ICI) erprobt digitale Regelung (Direct Digital Control) bei der Produktion von Sodaasche.
- 1965** Etwa 1000 Digitalrechner sind im industriellen Einsatz. Digital Equipment Corporation (DEC) bringt den Minicomputer PDP-8 (Kosten \$18000) auf den Markt.

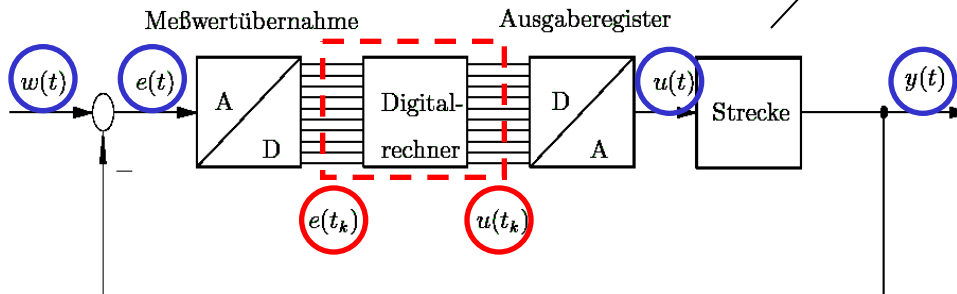




Abtastregelung bzw. zeitdiskretes Regelungssystem

Im Regelkreis sind Elemente enthalten, die Signale nur zu **diskreten** Zeitpunkten übertragen.

Kontinuierlicher Regelkreis



Regelkreis mit Digitalrechner als Regler

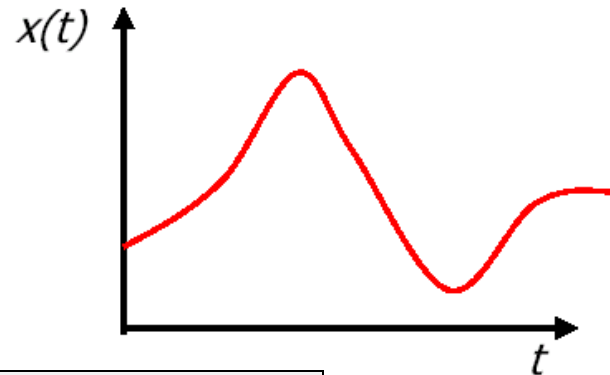
Unterscheidung:

- Analoge Signale
- Digitale Signale



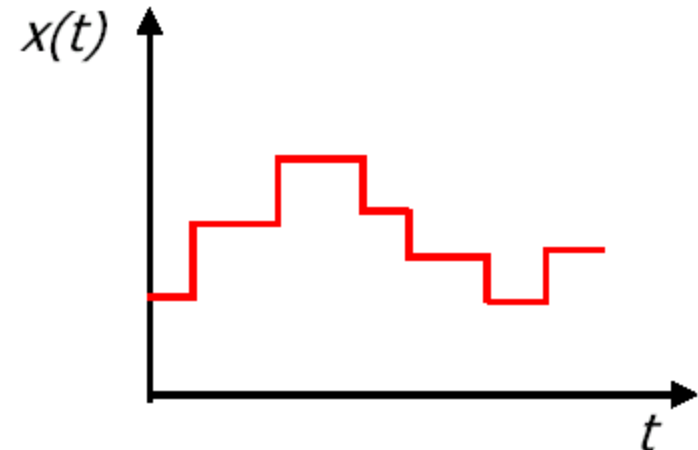
Definition: Kontinuierliches analoges Signal

Ein **kontinuierliches analoges Signal** kann jeden **beliebigen** Wert auf der Amplituden- bzw. Zeitachse annehmen.



Definition: Kontinuierliches quantisiertes Signal

Ein **kontinuierliches quantisiertes Signal** kann jeden **beliebigen** Wert auf der Zeitachse, aber nur **bestimmte Amplitudenwerte** annehmen.



Bei der **gleichförmigen Quantisierung** wird der Quantisierungsbereich in 2^w gleichgroße Intervalle aufgeteilt. Hierbei ist **w** die Anzahl der zur Verfügung stehenden Bits, man spricht hier auch von der **Wortlänge**.

Beispiel:

Quantisierungsbereich: **0 – 10 Volt**

Wortlänge: **3 bit**



Anzahl der Intervalle: **$2^3 = 8$**

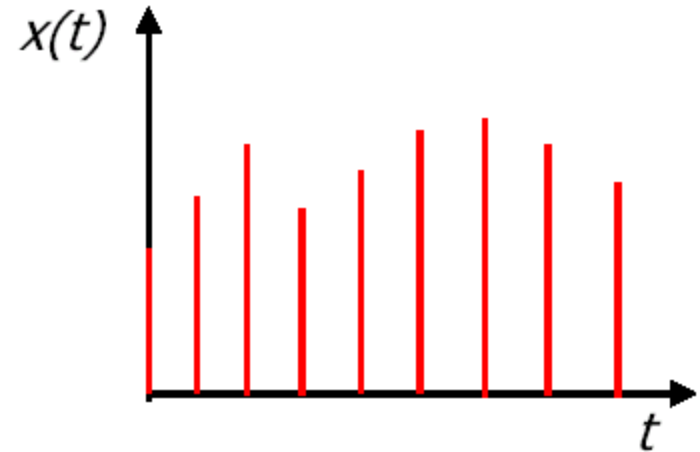
Intervallbreite: **$10/8 = 1,25$ Volt**

2^2	2^1	2^0	
0	0	0	0
0	0	1	1,25
0	1	0	2,5
0	1	1	3,75
1	0	0	5
1	0	1	6,25
1	1	0	7,5
1	1	1	8,75



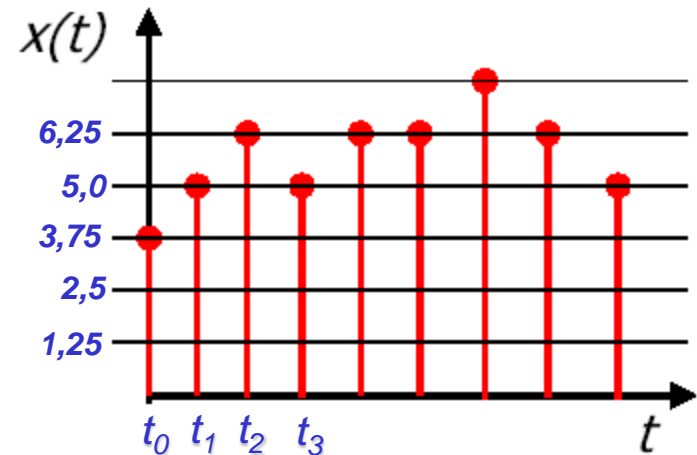
Definition: Zeitdiskretes Signal

Ein **zeitdiskretes Signal** kann nur zu **bestimmten** Zeitpunkten einen **beliebigen** Wert auf der Amplitudenachse annehmen.



Definition: Digitales Signal

Ein **digitales Signal** kann zu **bestimmten** Zeitpunkten nur einen **quantisierten** Amplitudenwert annehmen.



Definition: **Deterministisches Signal**

Ein **deterministisches Signal** lässt sich in seinem zeitlichen Verlauf mathematisch beschreiben und ist daher exakt bestimmbar.

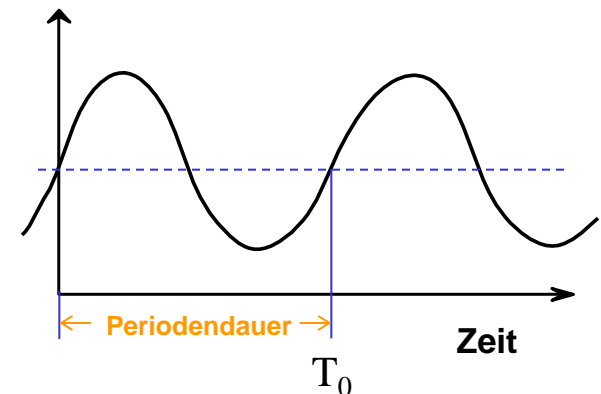
Definition: **Periodisches Signal**

Ein **periodisches Signal** wiederholt sich in gleichbleibenden Zeitintervallen T_0 : $x(t) = x(t + k \cdot T_0)$

mit $k = 1, 2, 3, \dots$

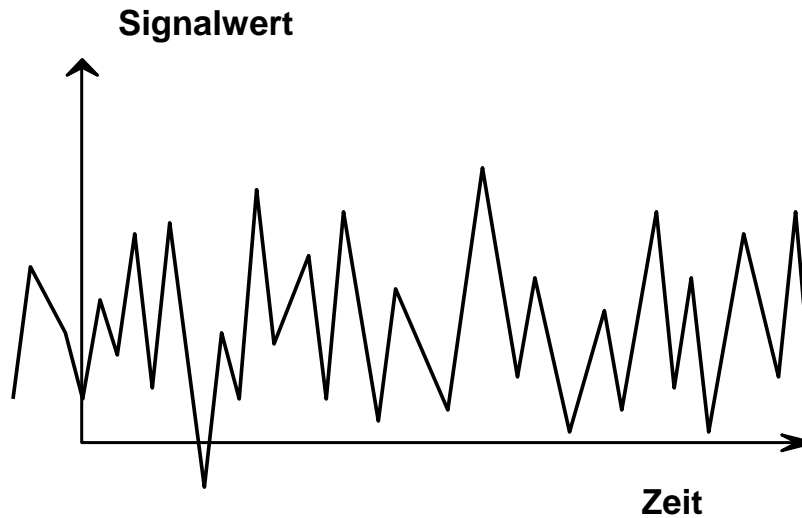
periodisch

Signalwert

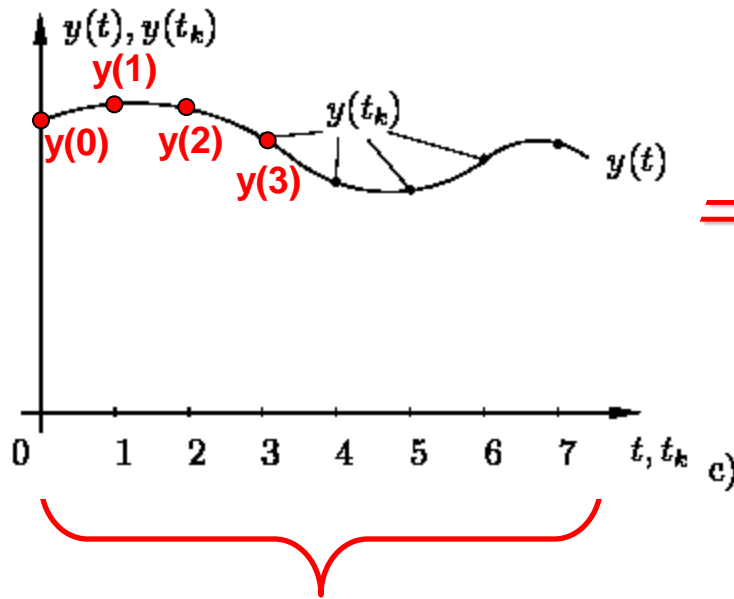


Definition: **Stochastisches Signal**

Ein **stochastisches Signal** hängt in seinem zeitlichen Verlauf vom **Zufall** ab.

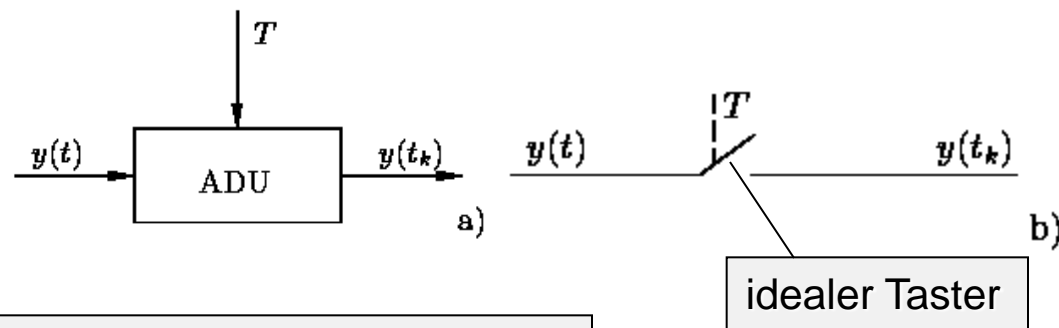


Ein **zeitdiskretes Signal** kann man aus einem kontinuierlichen Signal durch **Abtastung** gewinnen.



Periodische Abtastung

Durch Abtastung des kontinuierlichen Signals $y(t)$ zu den Zeitpunkten t_0, t_1, t_2, \dots erhält man das zeitdiskrete Signal oder die **Abtastfolge** $y(t_k) = y(t)|_{t=t_k}$.



ADU: Analog-Digital-Umsetzer
T: Vorgegebener Takt



- In einem A/D–Umsetzer wird ein kontinuierliches Signal **zeitdiskretisiert** und **amplitudenquantisiert**.
- Der Effekt der Amplitudenquantisierung ist bei hinreichend großer Auflösung für die Dynamik des Regelkreises vernachlässigbar.
- Im weiteren wird **äquidistante** Abtastung vorausgesetzt.
- Die Tastperiode **T** ist aber ein wesentlicher Analyse- und Syntheseparameter, der erheblichen Einfluss auf die Dynamik des Regelkreises hat.

Definition 2.4 Kontinuierliches System

In einem kontinuierlichen System sind die Eingangs- und Ausgangssignale sowie die Zustandsvariablen kontinuierliche Zeitfunktionen. Das dynamische Verhalten wird durch Dgln. beschrieben (Bild 2.4).

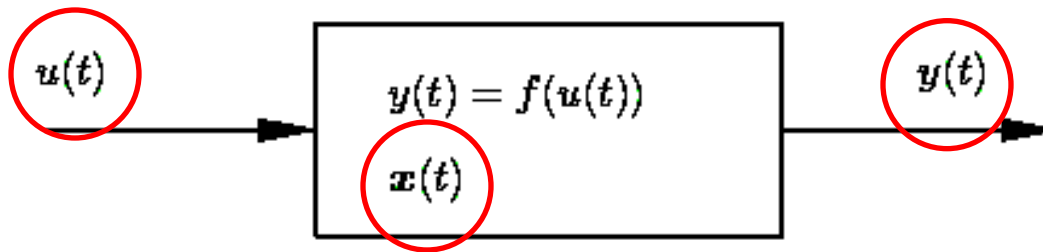


Bild 2.4: Blockbild eines kontinuierlichen Systems

Definition 2.5 Abtastsystem

Bei einem kontinuierlichen Abtastsystem sind die Zustandsvariablen kontinuierliche Funktionen, die Eingangs- und/oder Ausgangssignale diskrete Signale (Bild 2.5). \square

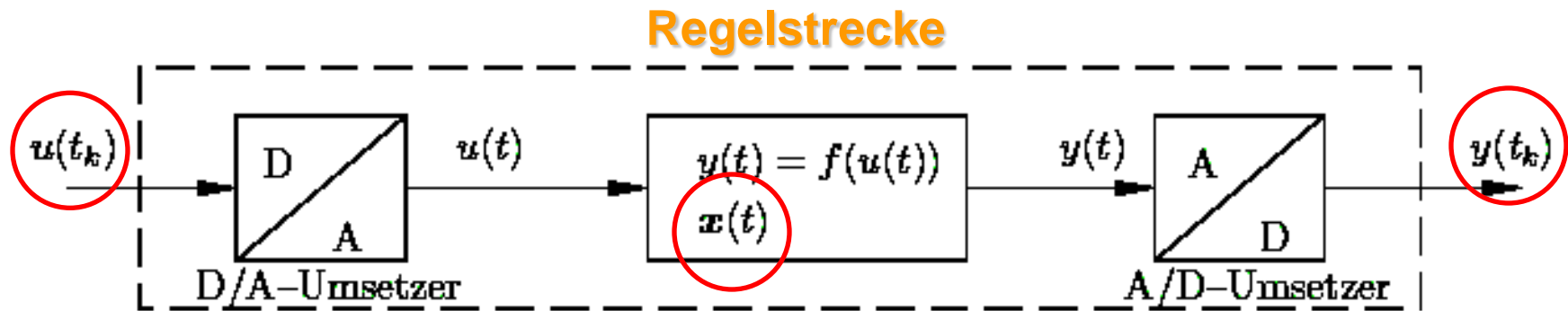


Bild 2.5: Blockschaltbild eines Abtastsystems

Definition 2.6 Diskretes System

Bei einem diskreten System sind die Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsvariablen diskrete Zeitfunktionen (Bild 2.6). □

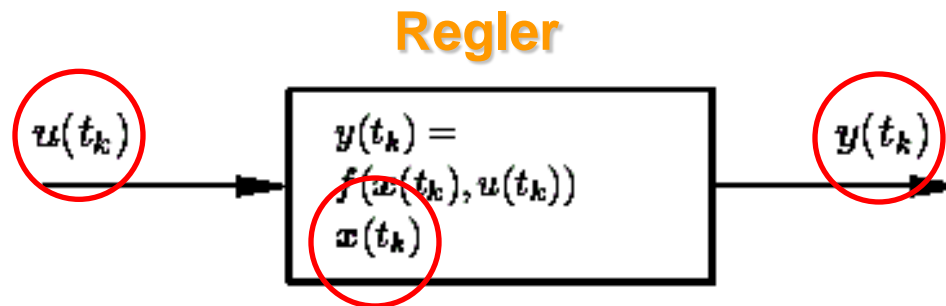


Bild 2.6: Zeitdiskretes System

Durch Abtastung des kontinuierlichen Signals $y(t)$ zu den Zeitpunkten t_1, t_2, t_3, \dots erhält man das zeitdiskrete Signal oder die Abtastfolge $y(t_k) = y(t)|_{t=t_k}$.

Beispiel: $y(0,5), y(0,7), y(0,8), \dots$

Wird eine **äquidistante** Abtastung mit dem Abtastintervall T vorgenommen, so kann man auch diese abgekürzte Schreibweise verwenden:

$$y_k = y(k) = y(kT) = y(t)|_{t=kT}$$

Beispiel:

Für $T=0,1$ bedeutet dies

$$y_3 = y(3) = y(3T) = y(0,3)$$

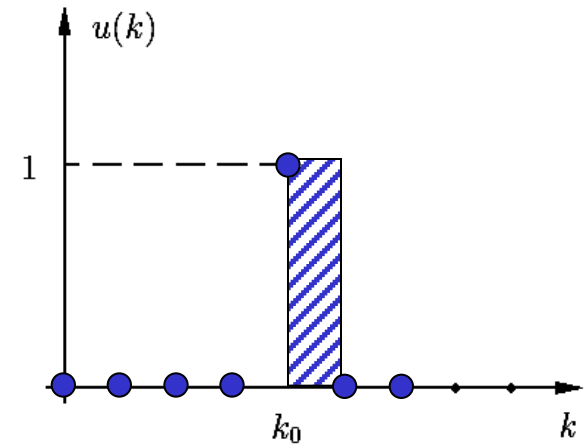
Die Bezeichnung y_k kann dabei sowohl für einen einzelnen Abtastwert als auch für eine ganze Abtastfolge stehen.



a) Einheitsimpuls oder Impulsfolge

Der **Einheitsimpuls** (Bild 2.12a)

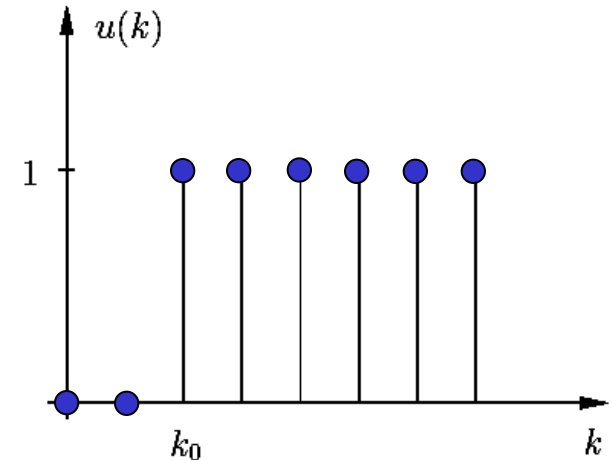
$$\delta(k - k_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = k_0 \\ 0 & \text{für } k \neq k_0 \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$



b) Einheitssprung oder Sprungfolge

Der **Einheitssprung** (Bild 2.12b)

$$1(k - k_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \geq k_0 \\ 0 & \text{für } k < k_0 \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



Die Energie eines diskreten bzw. kontinuierlichen Signals ist definiert zu:

diskret:

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2$$

kontinuierlich:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Energiesignale weisen eine endliche Energie auf.

Beispiel: Impulsfolge mit $E = 1$



Die Leistung eines diskreten bzw. kontinuierlichen Signals ist definiert zu:

diskret:

$$P_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n |x(k)|^2$$

kontinuierlich:

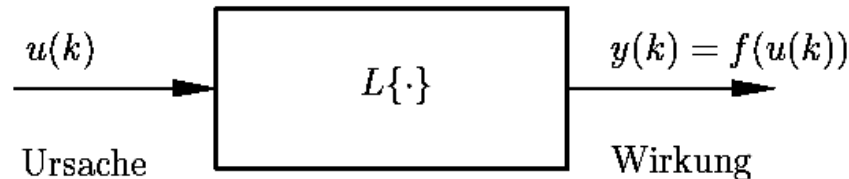
$$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

Leistungssignale weisen eine endliche Leistung auf.

Beispiel: Sprungfolge mit $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \cdot n = \frac{1}{2}$

Leistungssignale haben immer eine unendliche Energie !





Betrachtet werden lineare, zeitinvariante, kausale Systeme

Lineares System

Ein zeitdiskretes System ist **linear** wenn das Superpositionsprinzip gilt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} y_1(k) + y_2(k) &= f(u_1(k)) + f(u_2(k)) \\ &= f(u_1(k) + u_2(k)) \end{aligned}$$

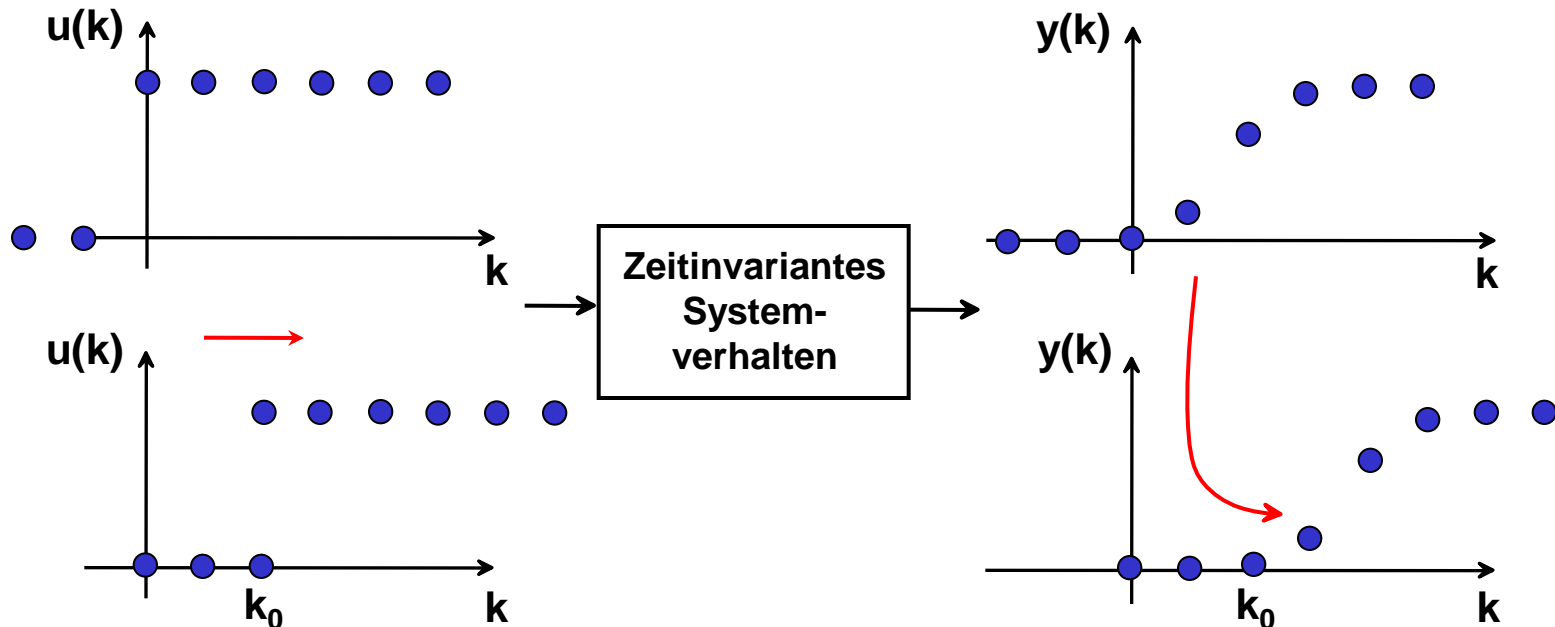
Kausalität

Ein System ist *Kausal*, wenn das Ausgangssignal $y(k)$ zu einem Zeitpunkt $k = k_0$ unabhängig von künftigen Werten des Eingangssignals $u(k)$ ist. Das bedeutet, die Antwort eines Systems erscheint bei Kausalität nicht vor der Erregung.



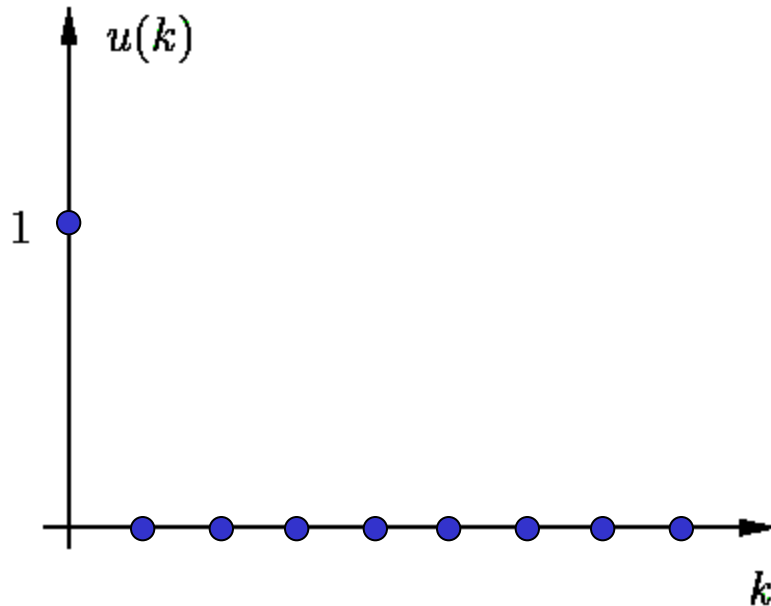
Zeitinvarianz

Ein zeitdiskretes System verhält sich **zeitinvariant**, wenn ein zeitverschobenes Eingangssignal $u(k - k_0)$ das zeitverschobene Ausgangssignal $y(k - k_0)$ erzeugt.

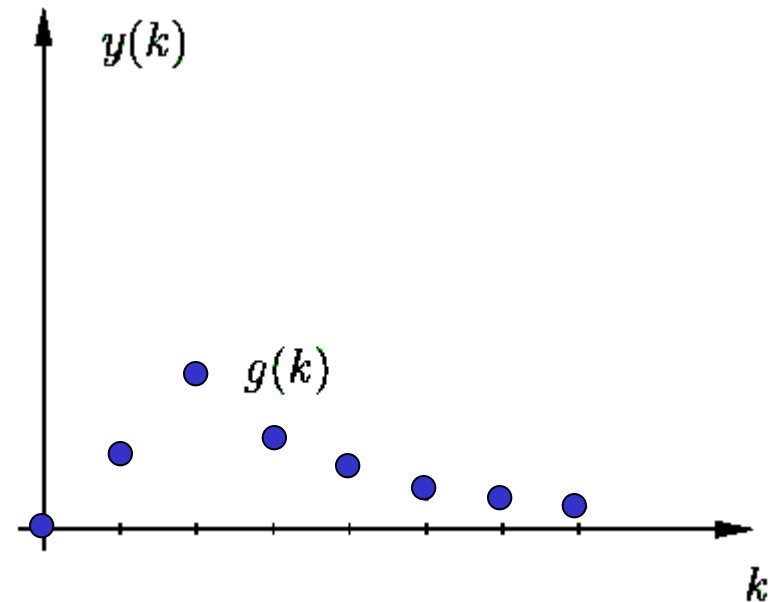


d) Beschreibung durch Gewichtsfolge

Genauso wie bei den kontinuierlichen Systemen lässt sich das Zeitverhalten diskreter Systeme durch die Impulsantwort oder Gewichtsfolge $g(k)$, der Antwort auf den Einheitsimpuls $\delta(k)$ beschreiben (Bild 2.14b).



a)



Faltungssummation

Die Antwort des linearen Systems mit der Gewichtsfolge $g(k)$ auf eine beliebige Eingangsfolge $u(k)$ kann mit der Faltungssummation bestimmt werden:

$$y(k) = \sum_{i=0}^k g(k-i)u(i) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.11)$$

oder mit der Substitution $k-i = r$:

$$y(k) = \sum_{r=0}^k g(r)u(k-r) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_0^t g(v)u(t-v)dv \quad (2.12)$$

$$=: g(k) * u(k).$$

$$(2.13)$$

Faltungsintegral



e) Beschreibung durch Differenzgleichungen

Das Signalübertragungsverhalten zeitdiskreter Systeme kann analog zu der Vorgehensweise bei kontinuierlichen Systemen durch Gleichungen erfolgen, die Eingangs- und Ausgangsgröße verknüpfen. Waren dies bei kontinuierlichen Systemen *Differentialgleichungen*, so sind es bei diskreten Systemen Differenzgleichungen.

Beispiel:

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

PT₁-System

Approximation von $dy(t)/dt$ durch den Differenzenquotienten:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T} = \frac{y(k) - y(k-1)}{T}$$



Aus

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad T_1 \frac{y(k) - y(k-1)}{T} + y(k) = u(k)$$

Beide Seiten mit T multiplizieren:

$$T_1(y(k) - y(k-1)) + Ty(k) = Tu(k)$$

$$(T_1 + T)y(k) - T_1y(k-1) = Tu(k)$$

Auflösen nach y(k):

$$y(k) = \frac{1}{T_1 + T} (T_1y(k-1) + Tu(k))$$

$$= \frac{T_1}{T_1 + T} y(k-1) + \frac{T}{T_1 + T} u(k)$$

$$= -a_1 y(k-1) + b_0 u(k)$$



Differenzengleichung eines zeitdiskreten Systems

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) &= \\ &= b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

mit den n Anfangsbedingungen:

$$y_0 = y(0) , \quad y(-1) = \dots = y(-n+1) = 0 \quad (2.15)$$

oder in kompakterer Notierung mittels Summenzeichen:

$$y(k) = \sum_{j=0}^n b_j u(k-j) - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

Differenzengleichungen stellen einen Rekursionsalgorithmus dar, der mit einem Digitalrechner schrittweise gelöst werden kann.



% Sprungantwort für die Differenzgleichung 1. Ordnung

% $y(k) = -a_1 * y(k-1) + b_0 * u(k)$

% als Approximation der DGL

% $T_1 * dy(t)/dt + y(t) = u(t)$

%

T1 = 1;

T = 0.1;

a1 = -T1/(T1+T)

b0 = T/(T1+T)

%

uk = 1;

%

% Anfangsbedingung $y(0) = 0$

%

y0 = 0;

%

% Berechnung der Ausgangsfolge für $k = 1$

%

y(1) = -a1 * y0 + b0 * uk;

for i=2:100

 y(i) = -a1 * y(i-1) + b0 * uk;

end

%

% Graphische Darstellung der Ausgangsfolge

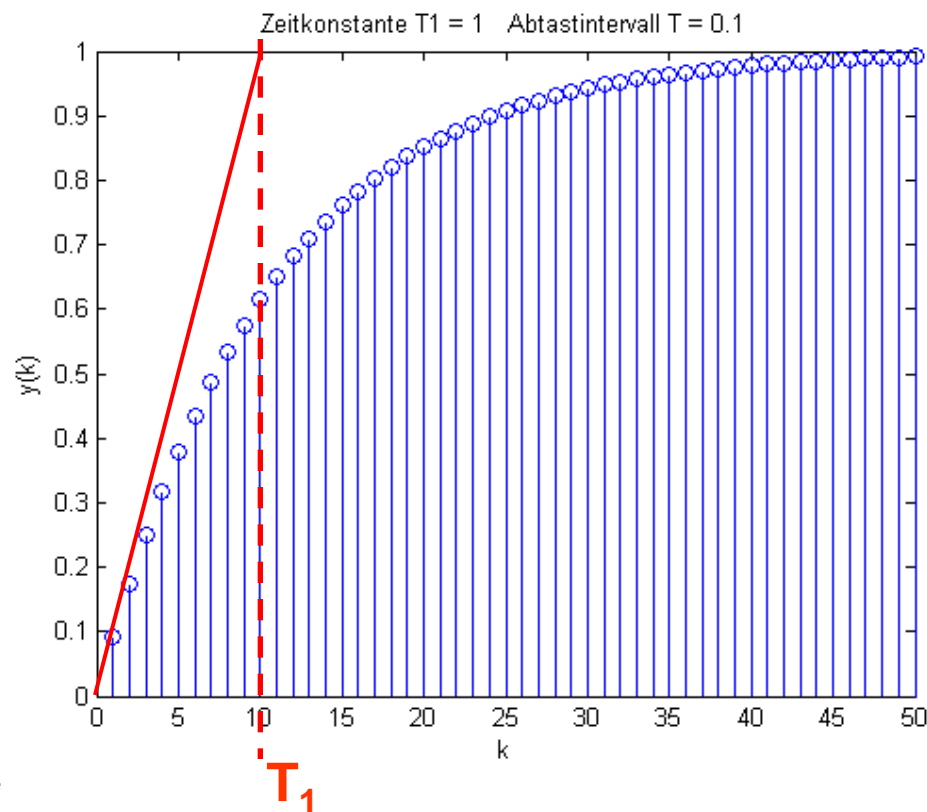
%

stem(y(1:50))

xlabel('k')

ylabel('y(k)')

title(['Zeitkonstante T1 = ', num2str(T1), ' Abtastintervall T = ' num2str(T)])



$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$y(k) = \frac{T_1}{T_1 + T} y(k-1) + \frac{T}{T_1 + T} u(k)$$

