Zusammenfassung der 5. Vorlesung

- **Zeitdiskretes Zustandsraummodell**
  - **Zustandsdifferenzengleichung, algebraische Ausgangsgleichung.**
  - **Blockschaltbild.**
  - **Zustandsraummodell aus Übertragungsverhalten.**
  - **Lösung der Zustandsgleichung.**
    - **Transitionsmatrix.**
    - **Bewegungsgleichung.**
  - **Zusammenhang zwischen Gewichtsfolge und Zustandsraummodell.**

Äquivalentes zeitdiskretes Zustandsraummodell

$$\boldsymbol{A}_d = e^{\boldsymbol{A}T} \qquad \boldsymbol{b}_d = \int_0^T e^{\boldsymbol{A}\tau'}\boldsymbol{b}\,d\tau'$$

$$\boldsymbol{c}_d^T = \boldsymbol{c}^T \qquad d_d = d$$

Abtastzeit

Steuerbarkeit zeitdiskreter Systeme

Erreichbarkeit

Ein zeitdiskretes System $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ heißt vollständig erreichbar, wenn es vom Ursprung $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ durch eine endliche Eingangsfolge $u(0), \ldots, u(N)$ in einen beliebig vorgebenen Endzustand $\mathbf{x}(N) = \mathbf{x}_e$ überführt werden kann.

Steuerbarkeit

Ein zeitdiskretes System $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ heißt vollständig zustandssteuerbar, wenn es von jedem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ durch eine endliche Eingangsfolge $u(0), \ldots, u(N)$ in den Nullzustand $\mathbf{x}(N) = \mathbf{0}$ überführt werden kann.

Steuerbarkeit zeitdiskreter Systeme (2)

Steuer- und Erreichbarkeit kontinuierlicher Systeme

Wenn ein kontinuierliches System vollständig steuerbar ist, dann existiert für jeden Anfangswert $\mathbf{x}_0$ eine geeignete Eingangsgröße $u(t), 0 \leq t \leq t_e$, so daß

$$\mathbf{0} = \mathbf{\Phi}(t_e)\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_e} \mathbf{\Phi}(t_e - \tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

gilt.

strebt für stabile Systeme nur asymptotisch gegen Null.

Für ein vollständig erreichbares System existiert für jedes beliebiges $\mathbf{x}(t_e)$ eine Eingangsgröße $u(t), 0 \leq t \leq t_e$, die die Gleichung

$$\mathbf{x}(t_e) = \int_0^{t_e} \mathbf{\Phi}(t_e - \tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

erfüllt.

Steuerbarkeit zeitdiskreter Systeme (3)

Steuer- und Erreichbarkeit kontinuierlicher Systeme

Ist ein kontinuierliches System vollständig steuerbar ist, dann muß offensichtlich gelten:

$$-\mathbf{\Phi}(t_e)\mathbf{x}_0 = \int_0^{t_e} \mathbf{\Phi}(t_e - \tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

für beliebige $\mathbf{x}_0$.

➥

Steuerbarkeit impliziert Erreichbarkeit, da $\Phi(t_e)$ immer invertierbar ist.

Steuerbarkeit zeitdiskreter Systeme (4)

Erreichbarkeitskriterium von Kalman

Ein zeitdiskretes System $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ist genau dann vollständig erreichbar, wenn für die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_S$ gilt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_S = \text{Rang } [\, \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \,] = n.$$

Beweis:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}u(k)$$

$k=0$: $\quad \boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{b}u(0)$

$k=1$: $\quad \boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{b}u(1)$

$$= \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}u(0) + \boldsymbol{b}u(1)$$

$k=2$: $\quad \boldsymbol{x}(3) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(2) + \boldsymbol{b}u(2)$

$$= \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}u(0) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}u(1) + \boldsymbol{b}u(2)$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b}u(0) + \boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{b}u(1) + \ldots + \boldsymbol{b}u(k-1)$$

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b} & \mathbf{A}^{k-2}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$

Kann nur nach *u* aufgelöst werden, wenn Q_s invertierbar ist.

Steuerbarkeit zeitdiskreter Systeme (5)

Erreichbarkeitskriterium von Kalman

Dieses Kriterium ist zwar hinreichend für die Steuerbarkeit eines zeitdiskreten Systems aber nicht notwendig!

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Rang } \mathbf{Q}_S = 0}$

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = 0$$

$k=0$:

$$x_1(1) = x_2(0)$$

$$x_2(1) = 0$$

für beliebige Anfangswerte

$k=1$:

$$x_1(2) = x_2(1) = 0$$

$$x_2(2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad k \geq 1$$

Steuerbarkeit zeitdiskreter Systeme (6)

Ein nicht erreichbares aber steuerbares zeitdiskretes System kann immer in 2 Teilsysteme aufgeteilt werden:

- **Einen erreichbaren Teil, dessen Zustandsvektor mit Hilfe von *u(t)* in den Ursprung überführt werden kann.**
- **Einen nicht erreichbaren Teil mit Eigenwerten bei Null, dessen Zustand von alleine in wenigen Schritten in den Ursprung geht.**

nicht erreichbar

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \text{Rang } \mathbf{Q}_S = \text{Rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u(k) = ? \quad \boxed{k = 0}$$

$$x_1(k+1) = 0$$
$$x_2(k+1) = x_2(k) + u(k)$$

$$x_1(1) = 0$$
$$x_2(1) = x_2(0) + u(0) \Rightarrow u(0) = -x_2(0)$$
$$u(0) = -1$$

$$\boxed{u(k) = \{-1\ 0\ 0 \ldots}$$

Steuerbarkeit zeitdiskreter Systeme (7)

Steuerbarkeitskriterium

Ein zeitdiskretes System $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ist genau dann vollständig steuerbar, wenn das Hautus-Kriterium

$$\text{Rang}\,[\,\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A}\;\;\mathbf{b}\,] = n$$

für alle von Null verschiedenen Eigenwerte λ_i erfüllt ist.

Beobachtbarkeit zeitdiskreter Systeme

Bei zeitdiskreten Systemen muß man auch zwischen Beobachtbarkeit und Rekonstruierbarkeit unterscheiden:

Beobachtbarkeit

Ein zeitdiskretes System $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$ heißt vollständig beobachtbar, wenn der Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ aus dem bekannten Verlauf der endlichen Eingangsfolge $u(0), ..., u(N)$ und der endlichen Ausgangsfolge $y(0), ..., y(N)$ berechnet werden kann.

Rekonstruierbarkeit

Ein zeitdiskretes System $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$ heißt vollständig rekonstruierbar, wenn aus dem bekannten Verlauf der endlichen Eingangsfolge $u(0), ..., u(N)$ und der endlichen Ausgangsfolge $y(0), ..., y(N)$ der Zustand $\mathbf{x}(N)$ berechnet werden kann.

Beobachtbarkeit zeitdiskreter Systeme (2)

Beobachtbarkeitskriterium von Kalman

Ein zeitdiskretes System (**A**,**c**) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn für die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{Q}_B$ gilt:

$$\text{Rang } \mathbf{Q}_B = \text{Rang } [\,\mathbf{c},\, \mathbf{A}^T\mathbf{c},\, \ldots,\, (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{c}\,] = n.$$

Dieses Kriterium ist zwar hinreichend für die Rekonstruierbarkeit eines zeitdiskreten Systems aber nicht notwendig!

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{x}(N) = ?$ $u(k) = \{1\ 1\ 1\ \ldots.$

$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

nicht beobachtbar

$$x_1(k+1) = u(k)$$
$$x_2(k+1) = x_2(k) + u(k)$$

nicht beobachtbar aber nur von *u(k)* abhängig !!

y(k)

Beobachtbarkeit zeitdiskreter Systeme (3)

Rekonstruierbarkeitskriterium

Ein zeitdiskretes System $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$ ist genau dann vollständig rekonstruierbar, wenn das Hautus-Kriterium

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix} = n$$

für alle von Null verschiedenen Eigenwerte λ_i erfüllt ist.

Fragestellung

Kann die Steuer- und Beobachtbarkeit durch Abtastung verloren gehen ?

Antwort: **Ja !!!**

Beobachtbarkeit zeitdiskreter Systeme (4)

Steuer- und Beobachtbarkeit des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems

Das zeitdiskrete System (A_d,b_d,c_d), das aus dem kontinuierlichen System (A, b, c) durch Abtastung mit der Abtastzeit T entsteht, ist genau dann vollständig steuer- und beobachtbar

- **wenn das kontinuierliche System (A, b, c) vollständig steuer- und beobachtbar ist und**
- **wenn für zwei verschiedene Eigenwerte λ_i und λ_j ($\lambda_i \neq \lambda_j$) der Matrix A die Bedingung**

$$\boxed{e^{\lambda_i T} \neq e^{\lambda_j T}}$$

erfüllt ist.

Beobachtbarkeit zeitdiskreter Systeme (5)

Steuer- und Beobachtbarkeit des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$

➥

$$\det \mathbf{Q}_B = \det \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ \lambda_1 c_1 & \lambda_2 c_2 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 c_2 \lambda_2 - c_1 c_2 \lambda_1 = c_1 c_2 (\lambda_2 - \lambda_1)$$

➥ $\neq 0 \quad \text{für} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

➥ **Das kontinuierliche System ist beobachtbar für** $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Das zeitdiskrete System ist beobachtbar für $e^{\lambda_1 T} \neq e^{\lambda_2 T}$

Beobachtbarkeit zeitdiskreter Systeme (6)

Steuer- und Beobachtbarkeit des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems

$$\boxed{e^{\lambda_1 T} \;=\; e^{\lambda_2 T}}$$

kann für verschiedene λ_1 und λ_2 nur für 2 komplexe Eigenwerte der kontinuierlichen Matrix A auftreten, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{\lambda_1\} &= \mathrm{Re}\{\lambda_2\} \\ (\mathrm{Im}\{\lambda_1\} - \mathrm{Im}\{\lambda_2\})T &= \pm 2\pi m, \;\; m = 1, 2, \ldots \\ (\omega_1 - \omega_2)T &= \pm 2\pi m, \;\; m = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

T darf nicht so gewählt werden, daß diese Gl. erfüllt ist !!!!

Für $\omega_2 = -\omega_1$ und $m = 1$ folgt $2\omega_1 T = 2\pi$ bzw. $2\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$ bzw. $\omega_1 = \omega_A/2$

$$\omega_A \;>\; 2\omega_1 \quad \text{mit} \quad \omega_A = \frac{2\pi}{T}$$

stellt Steuer- und Beobachtbarkeit des diskreten Systems sicher.

Entwurf auf endliche Einstellzeit (Dead-Beat Regelung)

Mit dem Entwurf auf endliche Einstellzeit besteht bei zeitdiskreten Systemen eine Möglichkeit, die keine Entsprechung bei zeitkontinuierlichen Systemen hat.

Gesucht ist eine Zustandsrückführung

$$u(k) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}(k) \quad ,$$

die das System

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \quad , \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$$

in den Endzustand

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(n) = \mathbf{0}$$

überführt.

n **= Anzahl der Zustandsgrößen**

Entwurf auf endliche Einstellzeit (2)

Satz:

Ein vollständig steuerbares System (A,b) wird durch eine Zustandsrückführung in endlicher Zeit - und zwar spätestens nach *n* Zeitschritten - von jedem beliebigen Anfangszustand in den Nullzustand überführt, wenn die Rückführung so gewählt wird, daß das rückgeführte System den n-fachen Eigenwert

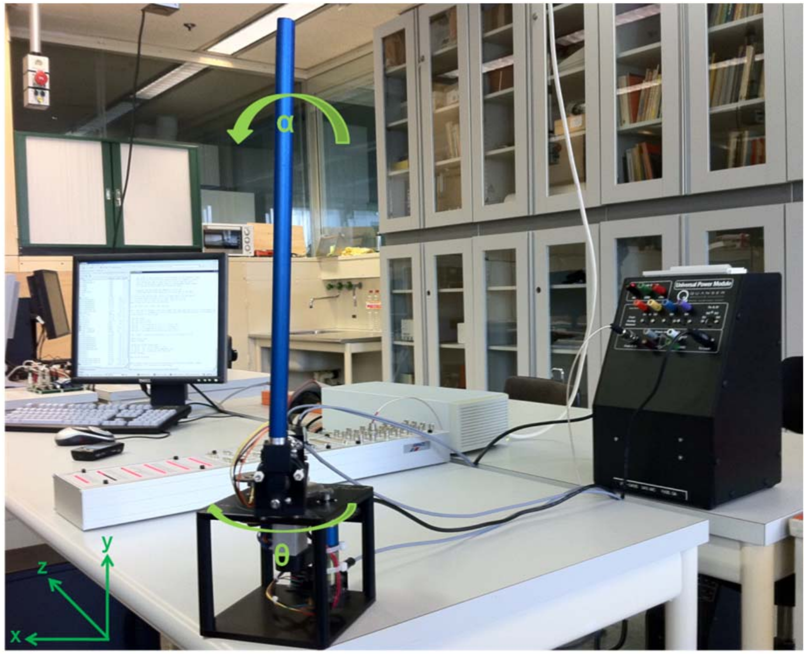
$$\lambda = 0$$

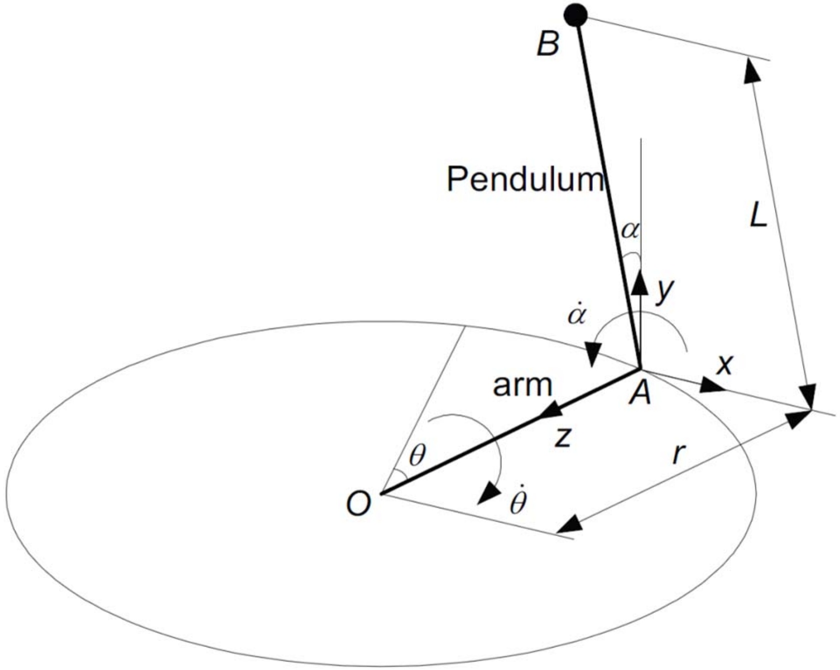
hat.

Regelgesetz:

$$u(k) = -\underbrace{[0\ 0 \ldots 0\ 1][\mathbf{b}\ \mathbf{A}\mathbf{b} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]^{-1}}_{\text{Letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix}} \mathbf{A}^n\, \mathbf{x}(k)$$

Stabilisierung eines aufrechten Pendels





Entwurf auf endliche Einstellzeit (4)

Ergebnisse für α = 0,1 rad (5,8 grad) und T = 50 ms: