Zusammenfassung der 2. Vorlesung

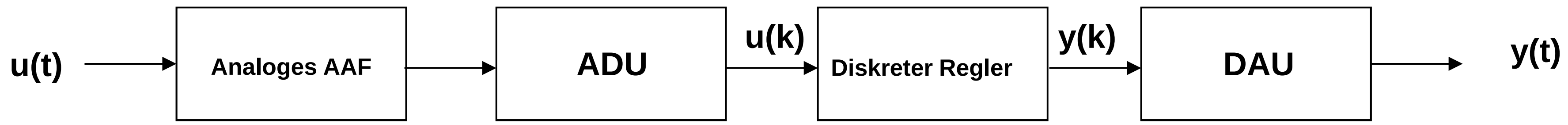
- **Fourier-Transformation versus Laplace-Transformation**
- **Spektrum kontinuierlicher Signale**
  - **Das Spektrum gibt an, welche Frequenzen in einem Signal vorkommen und welches Gewicht sie haben.**
- **Spektrum diskreter Signale**
  - **Das Spektrum eines zeitdiskreten Signals ist periodisch mit der Periode** $\omega_A = 2\pi/T$ **und mit** $1/T$ **gewichtet.**
- **Abtasttheorem von Shannon**
- **Ein kontinuierliches, bandbegrenztes Signal mit der Grenzkreis-frequenz** ω_g **ist eindeutig durch seine äquidistanten Abtastwerte bestimmt, wenn** $\omega_A > 2\omega_g$ **gilt.**

Zusammenfassung der 2. Vorlesung

Frequenzfaltung oder Aliasing

- **Frequenzfaltung:** **Frequenzen mit** $\omega > \omega_A/2$ **werden durch den Abtastvorgang auf Frequenzen** $\omega < \omega_A/2$ **gefaltet.**
- **Aliasing: Durch die Abtastung entsteht ein anderes (alias lat. anders) Signal (Signal mit einer reduzierten Frequenz).**

Häufig ist ein Einsatz von Tiefpaßfiltern (Anti-Aliasing-Filter) notwendig.



Beispiel: Impulsantwort

Gegeben ist die DGL eines PT$_1$-Systems

$$T_1\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Abtastperiode

Ersetzen der Differentiation durch Differenzenquotienten liefert:

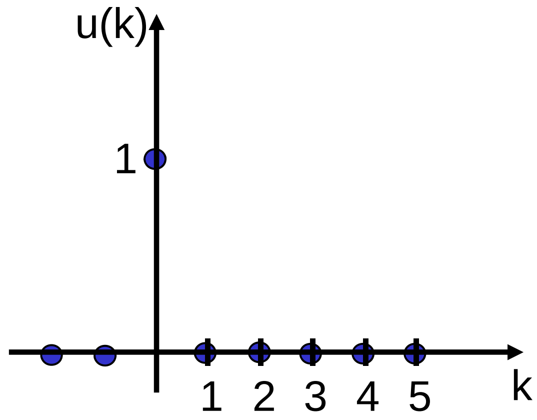
$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_0 u(k) \quad \textbf{mit} \quad a_1 = -\frac{T_1}{T_1 + T}, \quad b_0 = \frac{T}{T_1 + T}$$

Gesucht die Antwort auf u(k) = δ(k), (y(k) = 0 für k < 0)

$$k = 0: \; y(0) = -a_1 \cancelto{0}{y(-1)} + b_0 u(0) = b_0$$

$$k = 1: \; y(1) = -a_1 y(0) + b_0 \cancelto{0}{u(1)} = -a_1 b_0$$

$$k = 2: \; y(2) = -a_1 y(1) + b_0 \cancelto{0}{u(2)} = a_1^2 b_0$$



$$\Rightarrow \quad \boxed{y(k) = (-1)^k a_1^k b_0}$$

Beispiel: Impulsantwort (2)

Gewichtsfolge

$$g(k) = (-1)^k a_1^k b_0$$

$$a_1 = -\frac{T_1}{T_1 + T}$$

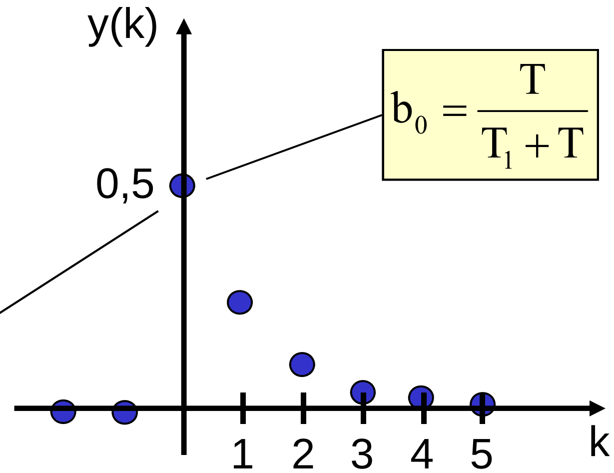
$|a_1| < 1$ **für** $T > 0$ **immer erfüllt !**

klingt für $|a_1| < 1$ ab.

Für $T_1 = T = 1$ **erhält man** $a_1 = -0{,}5$ **und** $b_0 = 0{,}5$ **und es ergibt sich:**

$$y(k) = g(k)$$

$$= \{0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125;\ 0{,}0625;\ \ldots\}$$

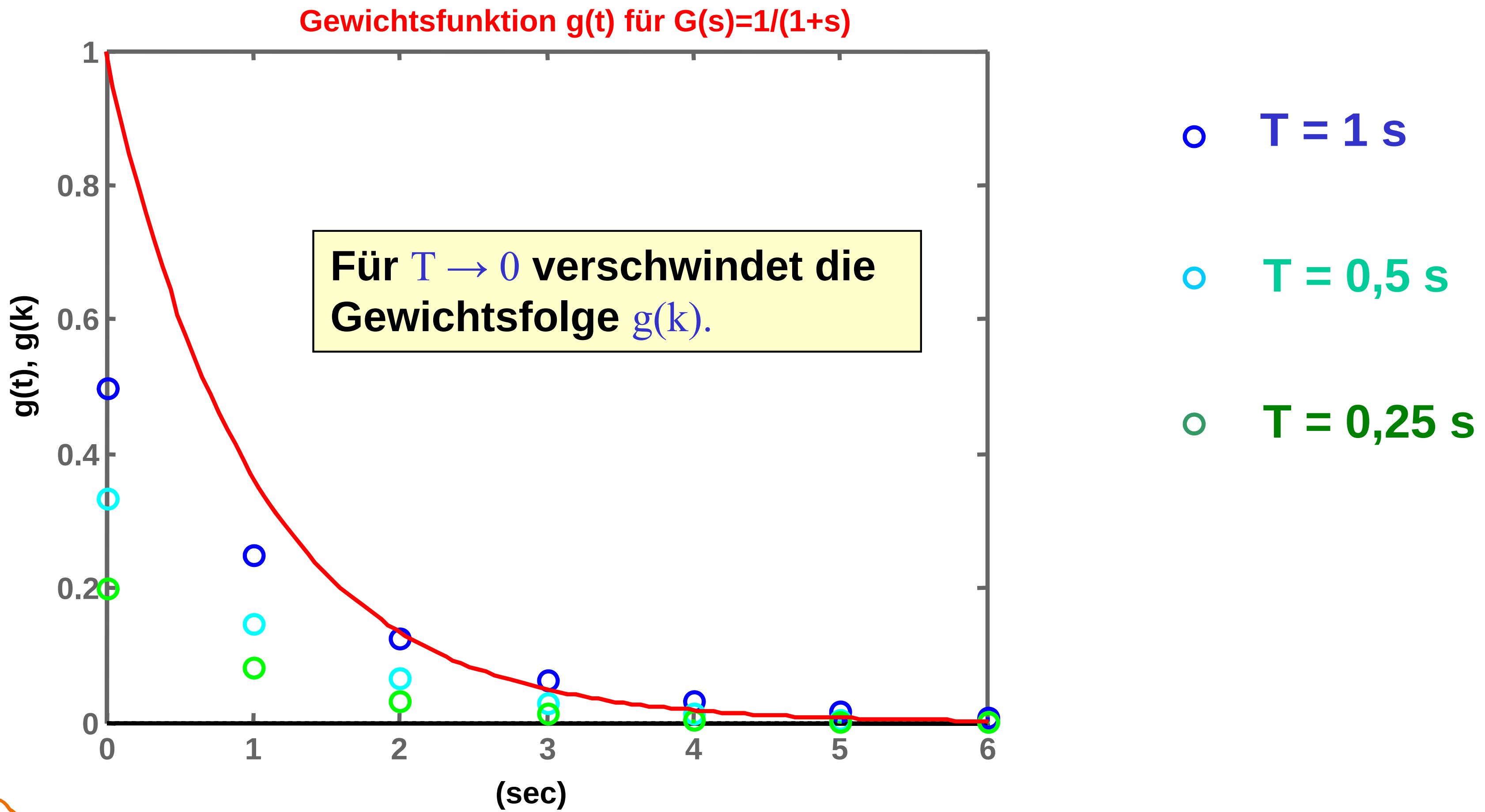


$$b_0 = \frac{T}{T_1 + T}$$

Anfangswert ist nicht nur von T_1, sondern auch von der Abtastperiode T abhängig !!!

Beispiel: Impulsantwort (3)

Gewichtsfolgen für verschiedene Abtastperioden T



Zusammenhang Gewichts- und Übergangsfolge

Kontinuierliche Systeme	**Zeitdiskrete Systeme**
$g(t) = \frac{d}{dt} h(t)$	$g(k) = h(k+1) - h(k)$
$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$	$h(k) = \sum_{i=1}^{k} g(i-1)$

Beispiel:

$$h(k) = \{0;\ 0,5;\ 0,75;\ 0,875; \dots\}$$

$$\Rightarrow \quad g(0) = h(1) - h(0) = 0,5 - 0 = 0,5$$

$$g(1) = h(2) - h(1) = 0,75 - 0,5 = 0,25$$

$$g(2) = h(3) - h(2) = 0,875 - 0,75 = 0,125$$

Beschreibung von Systemen

Kontinuierliche Systeme

Beschreibung mittels Differentialgleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} u(t)$$

Beschreibung durch Übergangsfunktion *h(t)* **und Gewichtsfunktion** *g(t)*

Beschreibung durch Übertragungsfunktion *G(s)* **und Frequenzgang** $G(j\omega)$**.**

Zeitdiskrete Systeme

Beschreibung mittels Differenzengleichungen

$$y(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i \, y(k-i) = \sum_{j=0}^{n} b_j \, u(k-j)$$

Beschreibung durch Übergangsfolge *h(k)* **und Gewichtsfolge** *g(k)*

?

z-Transformation: Motivation

Bei der Anwendung der Laplace-Transformation auf zeitdiskrete Signale treten immer transzendente Funktionen auf !!!

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)$$

Anwendung der Laplace-Transformation liefert:

$$F^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot e^{-kTs}$$

Anwendung des Verschiebungssatzes der Laplace-Transformation

$\Rightarrow$ **Eine vollständige Beschreibung mit rationalen Übertragungsfunktionen ist nicht möglich !!!!**

z-Transformation: Definition

Zur Vermeidung der transzendenten Funktionen wird die z-Transformation eingeführt:

$$z = e^{Ts}$$

Definition 3.1 z–Transformation

Die z–Transformation eines diskreten Signals $f(k)$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots$ ist als unendliche Potenzreihe in der komplexen Variablen z^{-1} erklärt. Die Koeffizienten dieser Reihe sind die Werte der Signalfolge:

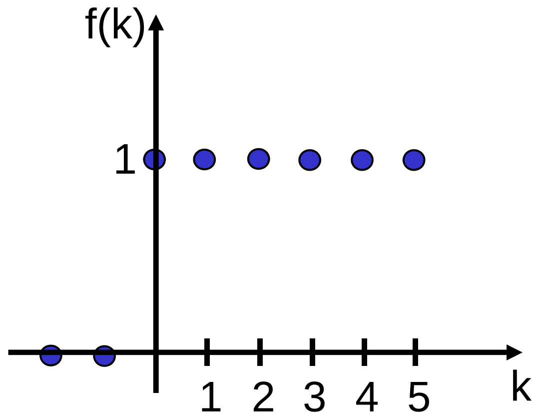
$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(kT)\} = \mathcal{Z}\{f(k)\} \tag{3.3}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \; . \tag{3.4}$$

z-Transformation: Beispiel Sprungfolge

$$f(k) = 1(k)$$

$$= \{1\ 1\ 1\ 1\ \cdots\}$$



Anwendung der z–Transformation liefert:

$$\boxed{F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k}} \boxed{= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}} \boxed{= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots}$$

Diese Reihe konvergiert für |z| > 1 zu dem Grenzwert

Bronstein, 1996, S. 390

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

z-Transformation: Eigenschaften

- **Die z-Transformation ist nur für Zahlenfolgen definiert.**
- **Durch die z-Transformation wird die linke komplexe s-Halbebene ins Innere des Einheitskreises abgebildet.**

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega \cdot T}$$

Argument der komplexen Zahl z

Betrag der komplexen Zahl z

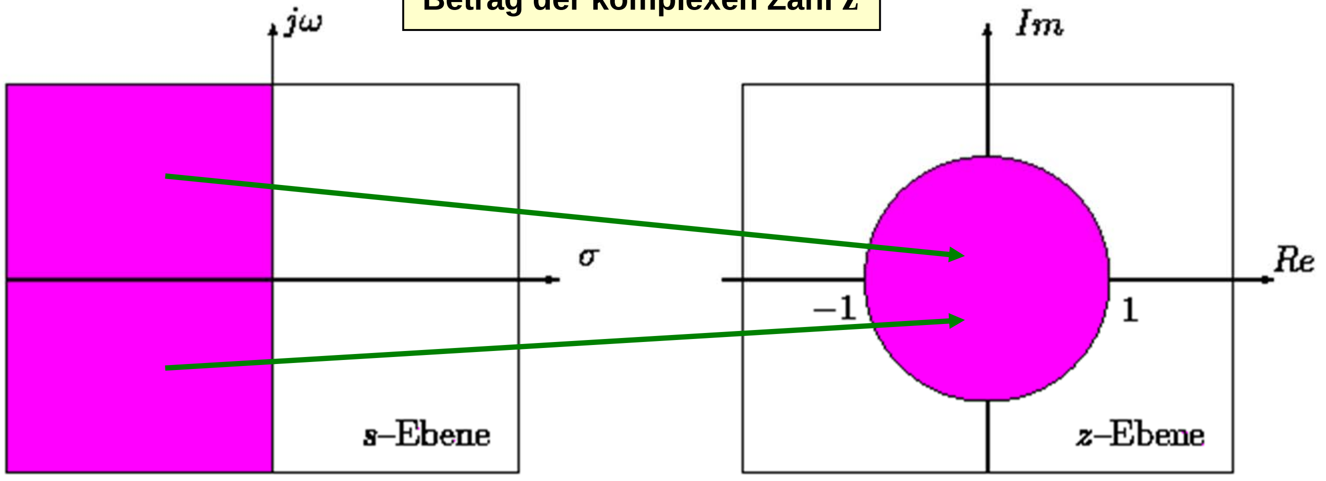
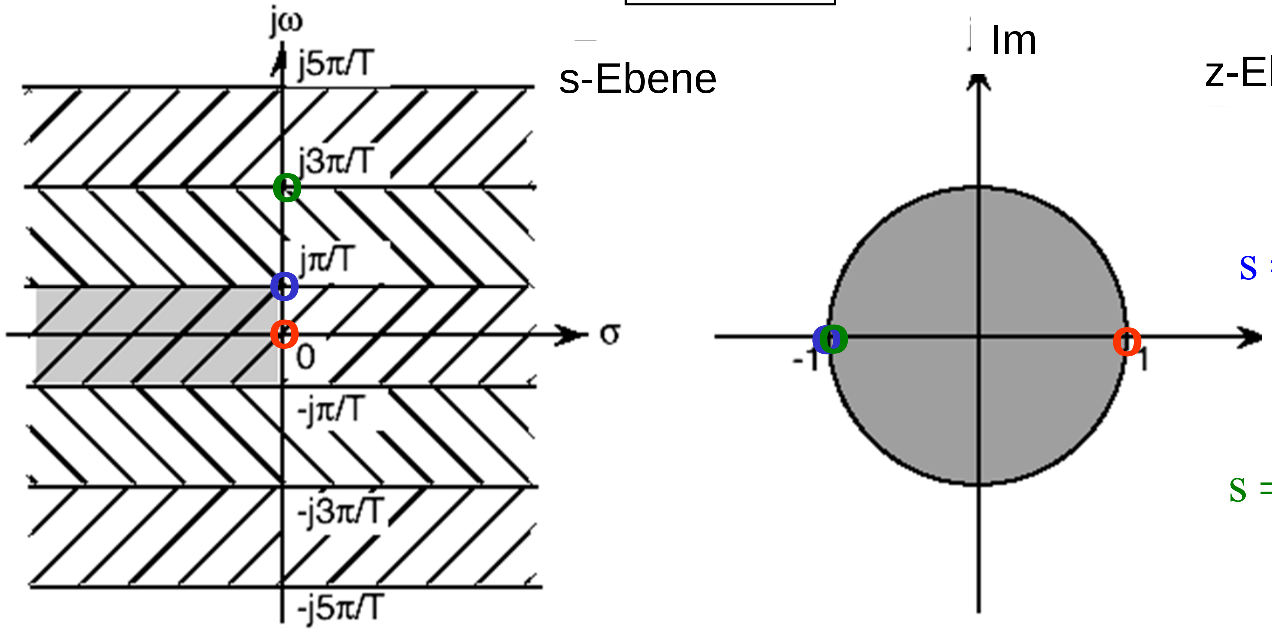


Bild 3.1: Abbildung der s–Ebene auf die z–Ebene

z-Transformation: Zusammenhang s- und z-Ebene

Die Abbildung der s-Ebene auf die z-Ebene ist nicht eineindeutig.

$$\boxed{z = e^{sT}}$$



$$s = 0 \;\rightarrow\; z = e^{0 \cdot T} = 1$$

$$s = j\frac{\pi}{T} \;\rightarrow\; z = e^{j\frac{\pi}{T} \cdot T} = e^{j\pi} = -1$$

$$s = j\frac{3\pi}{T} \;\rightarrow\; z = e^{j\frac{3\pi}{T} \cdot T} = e^{j3\pi} = e^{j\pi} = -1$$

Jeder einzelne Streifen wird eindeutig in dasselbe Gebiet, d.h. auf die gesamte z-Ebene abgebildet.

z-Transformation: Eigenschaften (2)

s–Ebene	z–Ebene
linke komplexe Ebene	Inneres des Einheitskreises
imaginäre Achse	Peripherie des Einheitskreises
rechte komplexe Ebene	Äußeres des Einheitskreises
Ursprung ($s = 0$)	$z = 1$

Tabelle 3.1: Zusammenhänge zwischen s– und z–Ebene

z-Transformation: Eigenschaften (3)

Linearität	$af_1(k) + bf_2(k)$	$aF_1(z) + bF_2(z)$
Rechtsverschiebung	$f(k-i)$	$z^{-i}F(z)$
Linksverschiebung	$f(k+i)$	$z^iF(z) - z^i\sum_{j=0}^{i-1} z^{-j}f(j)$
Differenzensatz	$\Delta f(k) = f(k) - f(k-1)$	$\frac{z-1}{z}F(z)$
Summensatz	$f_\Sigma(k) = \sum_{\nu=0}^{k} f(\nu)$	$\frac{z}{z-1}F(z)$
Faltungssatz	$\sum_{i=0}^{\infty} f_1(k-i)f_2(i)$	$F_1(z)F_2(z)$

ISR

z-Transformation: Eigenschaften (4)

Dämpfungssatz	$e^{akT} f(k)$	$F(e^{-aT} z)$
Ähnlichkeitssatz	$a^k f(k)$	$F(\frac{z}{a})$

Anfangswertsatz	$f(0) = \lim\limits_{z\to\infty} F(z)$, **wenn der Grenzwert existiert**
Endwertsatz	$f(\infty) = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)F(z)$, **wenn der Grenzwert existiert**

Tabelle 3.2: Definitionen und Eigenschaften der z–Transformation

$$f(k) = 1(k) \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot F(z) \quad = \lim_{z\to 1}\cancel{(z-1)}\cdot\frac{z}{\cancel{z-1}} \quad = \lim_{z\to 1} z = 1$$

Übertragungsfunktion: Beispiel

Gegeben ist die Differenzengleichung

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_0 u(k)$$

Anwendung des Rechtsverschiebungssatzes

$$f(k-i) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-i} F(z)$$

liefert:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) = b_0 U(z)$$

$$(1 + a_1 z^{-1}) Y(z) = b_0 U(z)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{b_0 z}{z + a_1}}$$

Übertragungsfunktion diskreter Systeme

Kontinuierliche Systeme

Beschreibung mittels Differentialgleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} u(t)$$

Differentiationssatz der Laplace-Transformation

$$f^{(n)}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^n \cdot F(s)$$

liefert:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$= \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$

Zeitdiskrete Systeme

Beschreibung mittels Differenzengleichungen

$$y(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i \, y(k-i) = \sum_{j=0}^{n} b_j \, u(k-j)$$

Rechtsverschiebungssatz der z-Transformation

$$f(k-i) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-i} F(z)$$

liefert:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$= \frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n})}{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n})}$$

Übertragungsfunktion (2)

Kontinuierliche Systeme

Gewichtsfunktion und Übertragungsfunktion

$$G(s) = \mathfrak{L}\{g(t)\}$$

Parallelschaltung

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

Reihenschaltung

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

Zeitdiskrete Systeme

Gewichtsfolge und z-Übertragungsfunktion

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g(k)\}$$

Parallelschaltung

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z)$$

Reihenschaltung

$$G(z) = G_1(z) \cdot G_2(z)$$

Linearität

Faltungssatz

Übertragungsfunktion (3)

Kontinuierliche Systeme | **Zeitdiskrete Systeme**

Verstärkung eines Systems mit Ausgleich

$$K = \lim_{t\to\infty} y(t) \quad \textbf{für} \quad u(t) = 1(t)$$

$$K = \lim_{k\to\infty} y(k) \quad \textbf{für} \quad u(k) = 1(k)$$

Anwendung des Endwertsatzes

$$K = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) \quad \textbf{für} \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$K = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s)U(s)$$

$$K = \lim_{s\to 0} G(s) \;= G(0)$$

$$K = \frac{b_0}{a_0}$$

$$K = \lim_{z\to 1} (z-1) \cdot Y(z) \quad \textbf{für} \quad U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$K = \lim_{z\to 1} (z-1) \cdot G(z)U(z)$$

$$K = \lim_{z\to 1} z \cdot G(z) = G(1)$$

$$K = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

Übertragungsfunktion (4)

Pole und Nullstellen

Zur Definition der Pole und Nullstellen wird Zähler und Nenner von

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n})}{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n})}$$

mit z^n multipliziert:

Polynomform der z-Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n} = \frac{Z(z)}{N(z)}$$

Die Pole der z-Übertragungsfunkion sind die Lösungen der Gleichung

$$N(z) = 0$$

Die Nullstellen der z-Übertragungsfunkion sind die Lösungen der Gleichung

$$Z(z) = 0$$

Rücktransformation in den Zeitbereich

Für die Rücktransformation

$$F(z) \quad \longrightarrow \quad f(k)$$

stehen 3 Methoden zur Verfügung:

1. **Polynomdivision**
2. **Residuenmethode**
3. **Partialbruchzerlegung**

Einfache Berechnung der ersten Elemente von f(k)

Analytischer Ausdruck für ein Glied der Folge f(k)

Wurde bereits in SRT ausführlich behandelt

Polynomdivision

Beispiel:

$$F(z) = \frac{1.08z - 0.4z^2}{(z+0.5)(z-0.3)^2} = \frac{-0.4z^2 + 1.08z}{z^3 - 0.1z^2 - 0.21z + 0.045}$$

$$\begin{array}{lcl}
(-0.4z^2 + 1.08z) : (z^3 - 0.1z^2 - 0.21z + 0.045) & = & -0.4z^{-1} \\
\underline{-(-0.4z^2 + 0.04z + 0.084 - 0.018z^{-1})} & & \\
\quad 1.04z - 0.084 + 0.018z^{-1} & & +1.04z^{-2} \\
\quad \underline{-(1.04z - 0.104 - 0.2184z^{-1} + 0.0468z^{-2})} & & \\
\qquad 0.02 + 0.2364z^{-1} - 0.0468z^{-2} & & +0.02z^{-3} \\
\qquad 0.2384z^{-1} \ldots & & +0.2384z^{-4}
\end{array}$$

$$f(k) = \{0, -0.4, 1.04, 0.020, 0.2384, \ldots$$

$$F(z) = 0 \cdot z^0 - 0.4z^{-1} + 1.04z^{-2} + 0.020z^{-3} + 0.2384z^{-4}$$

Berechnung der Ausgangsgröße

Kontinuierliche Systeme

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Laplace-Transformierte Eingangsgröße einsetzen:

z.B. $U(s) = \mathfrak{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Lösung durch inverse Laplace-Transformation

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

Zeitdiskrete Systeme

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z)$$

Rechtsverschiebungssatz der z-Transformation

$$f(k-i) \circ\!\!-\!\!\bullet \; z^{-i}F(z)$$

liefert: $y(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i \, y(k-i) = \sum_{j=0}^{n} b_j \, u(k-j)$

Lösung durch Einsetzen der Eingangsfolge

z.B. $u(k) = 1(k)$

Berechnung der Ausgangsgröße (2)

Gegeben:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,632}{z - 0,368}$$

$$zY(z) - 0,368 \cdot Y(z) = 0,632 \cdot U(z)$$

$$Y(z) - 0,368 \cdot z^{-1} Y(z) = 0,632 \cdot z^{-1} U(z)$$

Rechtsverschiebungssatz

$$y(k) - 0,368 \cdot y(k-1) = 0,632 \cdot u(k-1)$$

für z.B.: $u(k) = 1(k)$

$$y(k) = 0,368 \cdot y(k-1) + 0,632 \cdot 1(k-1)$$

Abtastregelkreis

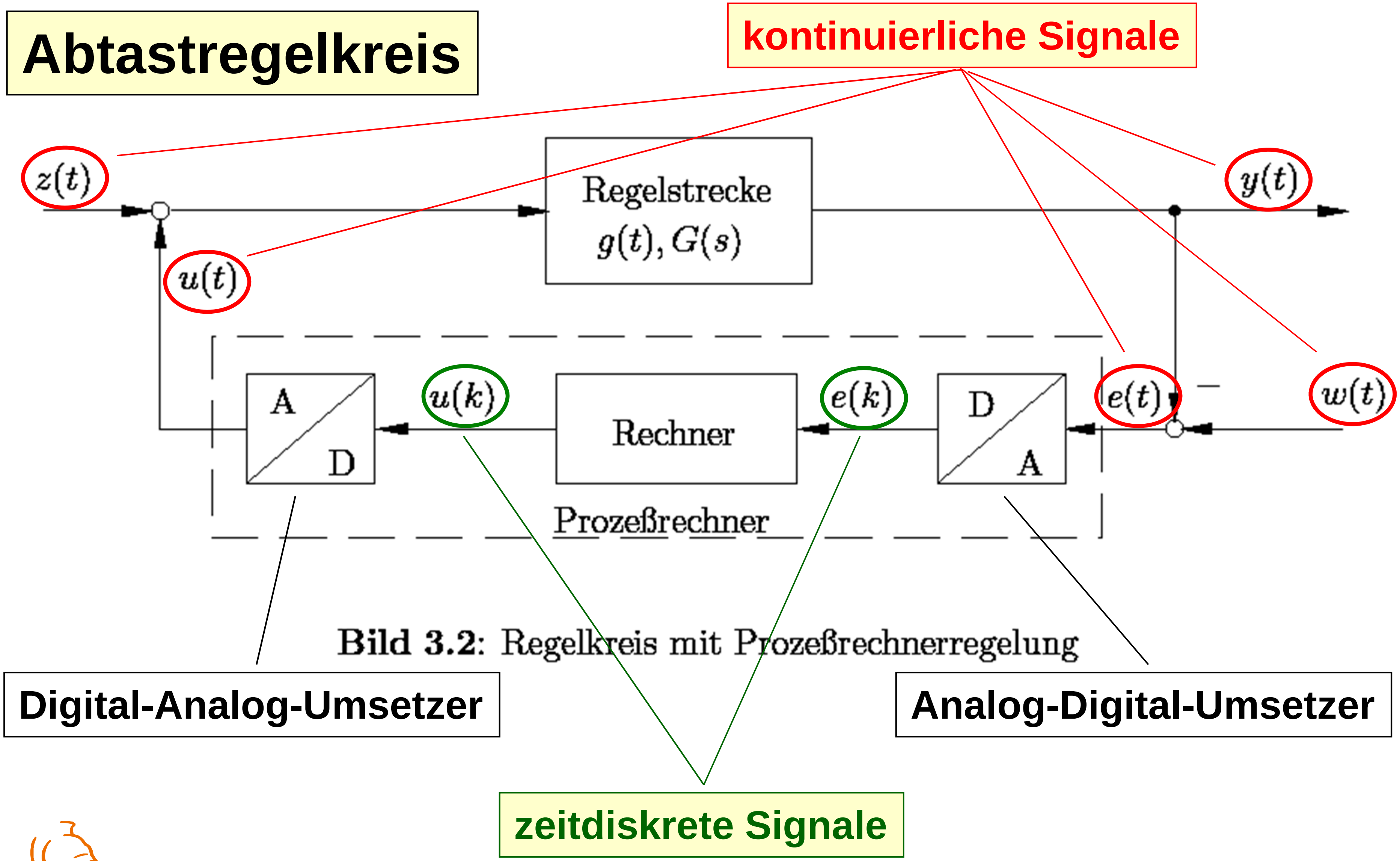
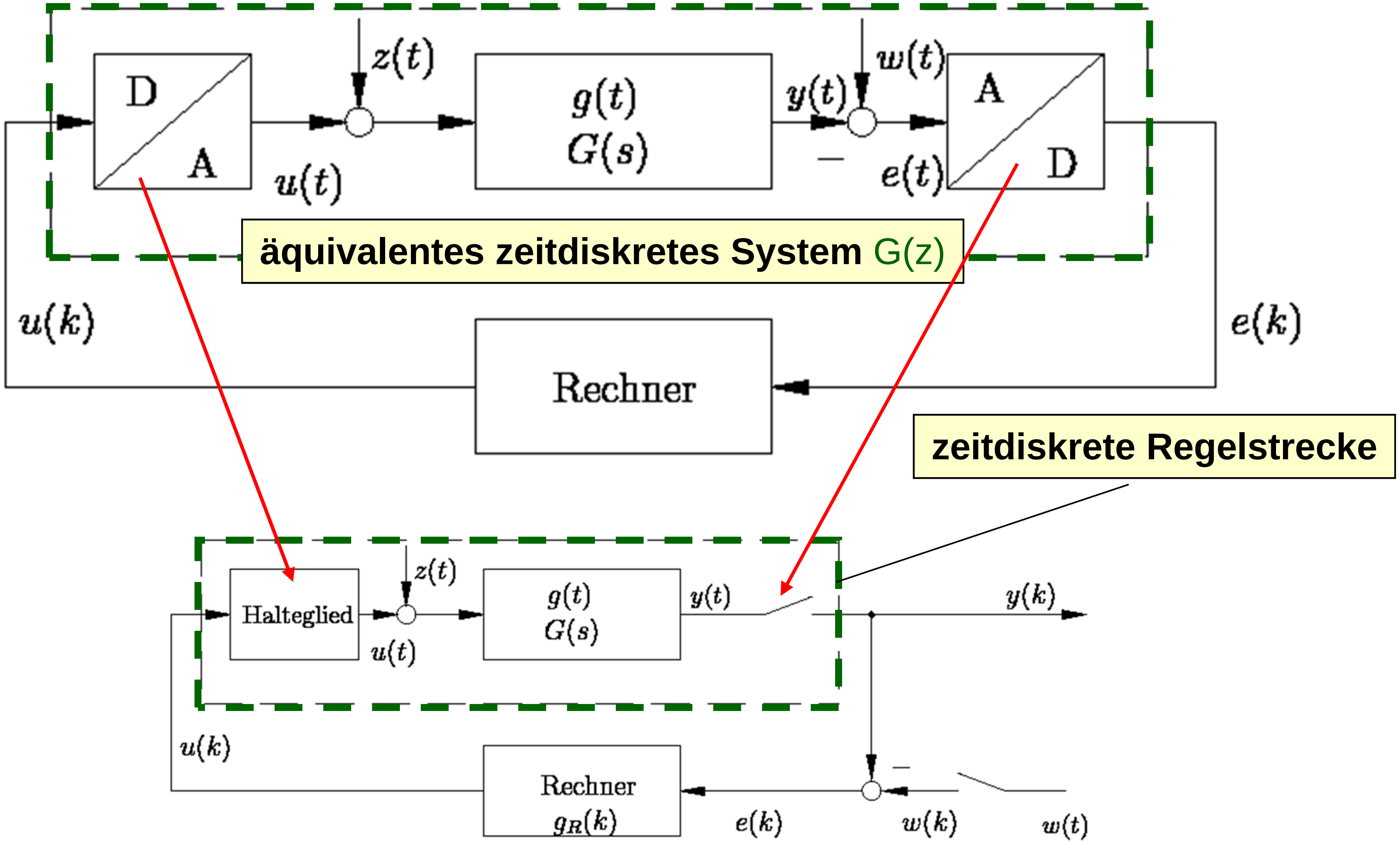


Bild 3.2: Regelkreis mit Prozeßrechnerregelung

A/D- und D/A-Umsetzer werden mit der Regelstrecke zusammengefaßt:

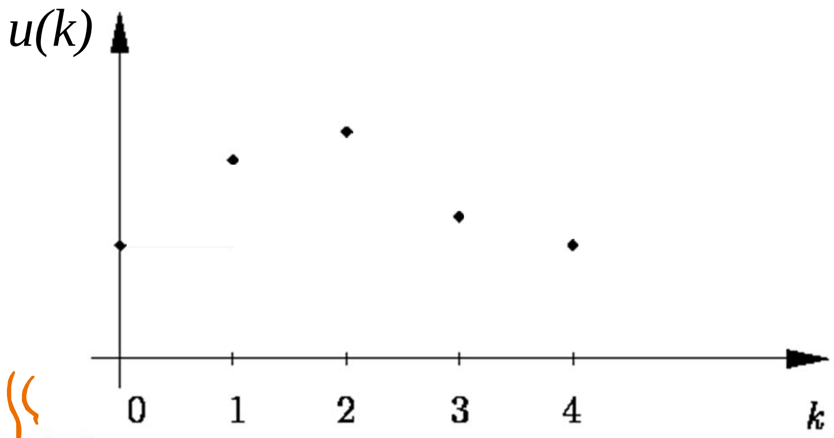


Halteglied 0-ter Ordnung

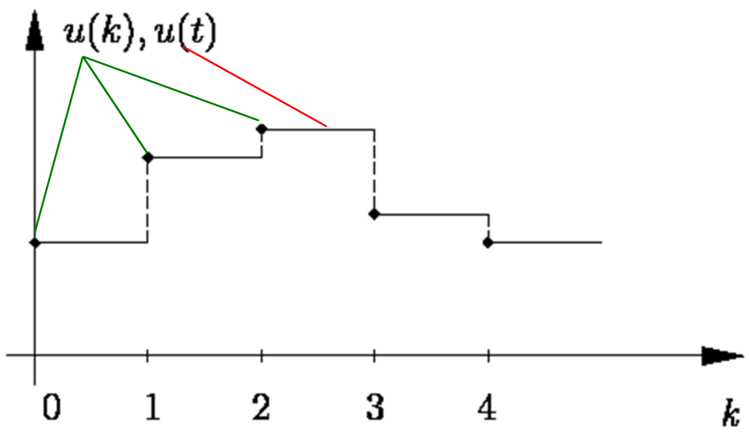
Aufgabe:

Das Halteglied setzt eine Zahlenfolge *u(0), u(1), u(2), ...* **in ein analoges Signal** *u(t)* **um, mit**

$$\boxed{u(t) = u(k) = \text{const.}} \quad \textbf{für} \quad \boxed{kT \le t < (k+1)T\,.}$$

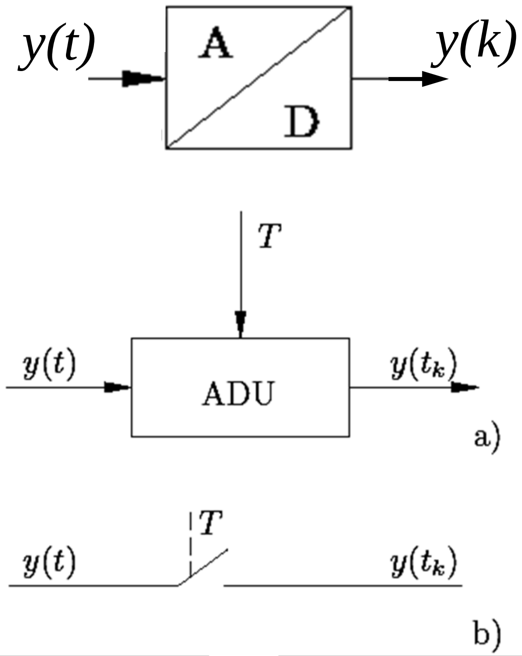


$\Rightarrow$



z-Üfkt. von Abtastsystemen (3)

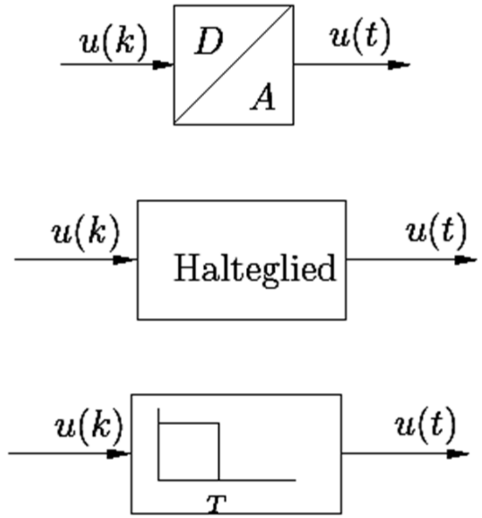
A/D-Umsetzer als idealer Abtaster

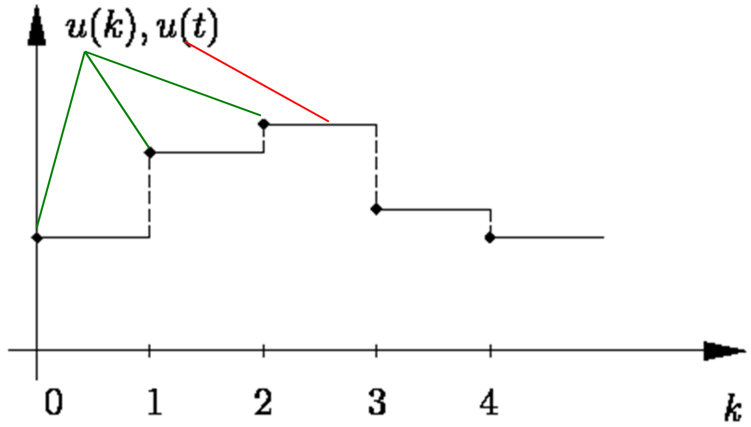


analoges Signal

Zahlenfolge

D/A-Umsetzer als Halteglied 0-ter Ordnung





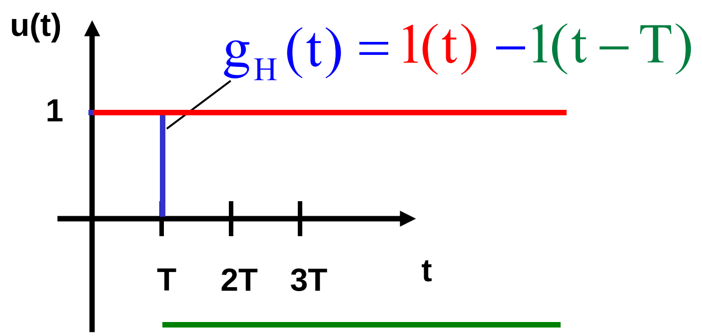
z-Üfkt. von Abtastsystemen (4)

Übertragungsverhalten der zeitdiskreten Regelstrecke ?

Zunächst Übertragungsverhalten des Haltegliedes 0-ter Ordnung ?

Das Halteglied 0-ter Ordnung soll für einen Dirac'schen Deltaimpuls $\delta(t)$ **einen Puls der Breite** T **und der Höhe** 1 **liefern.**

$\delta(t) \longrightarrow$ **Halteglied** $\longrightarrow u(t)$



$$\mathfrak{L}\{g_H(t)\} = G_H(s) = H(s)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-sT} \boxed{= \frac{1-e^{-sT}}{s}}$$

Gewichtsfunktion der Reihenschaltung von Halteglied und Regelstrecke

$$g_{HG}(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{\frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot G(s)\}$$

➥

Gewichtsfolge durch ideale Abtastung:

$$g_{HG}(kT) = \mathfrak{L}^{-1}\{\frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot G(s)\}\,|_{t=kT}$$

Ideale Abtastung

➥

z-Transformierte der Gewichtsfolge:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g_{HG}(kT)\} = \mathcal{Z}\left\{\mathfrak{L}^{-1}\{\frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot G(s)\}\,|_{t=kT}\right\}$$

$$= \mathcal{Z}\left\{\mathfrak{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)}{s} \cdot e^{-Ts}\}\,|_{t=kT}\right\}$$

z-Üfkt. von Abtastsystemen (6)

z-Transformierte der Gewichtsfolge:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{ \underbrace{\mathfrak{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\}}_{\text{Übergangsfunktion } h(t) \text{ der Regelstrecke}} \Big|_{t=kT} - \underbrace{\mathfrak{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\cdot e^{-Ts}\}}_{\text{Übergangsfunktion } h(t-T) \text{ der Regelstrecke}} \Big|_{t=kT} \right\}$$

➥

Übergangsfolge h(kT)

Übergangsfolge h(kT-T)

$$h(kT) = \mathfrak{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\}\Big|_{t=kT} \qquad h(kT-T) = \mathfrak{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\cdot e^{-Ts}\}\Big|_{t=kT}$$

➥

$$\boxed{G(z) = \mathcal{Z}\{h(kT) - h(kT-T)\}}$$

z-Üfkt. von Abtastsystemen (7)

z-Üfkt. der Reihenschaltung von Halteglied und Regelstrecke

Anwendung des Rechtsverschiebungssatzes auf

$$f(k-i) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-i}F(z)$$

$$\boxed{G(z) = \mathcal{Z}\left\{h(kT) - h(kT-T)\right\}}$$

liefert

$$G(z) = \mathcal{Z}\{h(kT)\} \; - z^{-1}\mathcal{Z}\{h(kT)\}$$

$$G(z) = (1-z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\{h(kT)\}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\{h(kT)\}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\{\mathfrak{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\}\,|_{t=kT}\}}$$