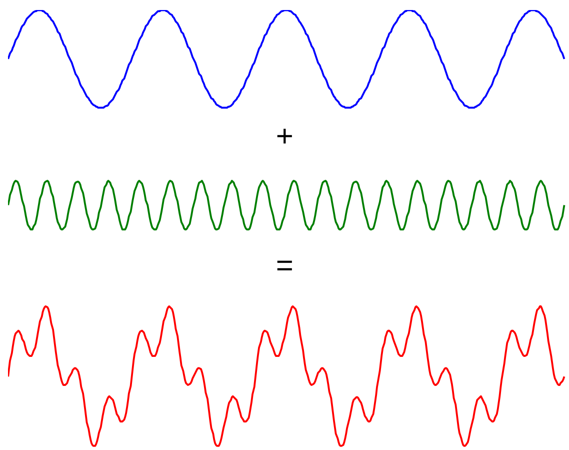
Zusammenfassung der 1. Vorlesung

- **Einordnung und Motivation**
- **Grundlegende Definitionen**
  - Kontinuierliches Signal
  - Quantisiertes Signal
  - Zeitdiskretes Signal
  - Digitales Signal
  - Auflösung der A/D- Umsetzer der MicroAutoBox
  - Kontinuierliches System
  - Abtastsystem
  - Diskretes System
- **Schreibweise diskreter Signale**

Zusammenfassung der 1. Vorlesung

- **Elementare diskrete Signale**
  - Einheitsimpuls, Impulsfolge
  - Einheitssprung, Sprungfolge
  - Energie- und Leistungssignale
- **Eigenschaften diskreter Systeme**
  - Linearität, Zeitinvarianz, Kausalität
  - Gewichtsfolge und Faltungssummation
  - Differenzengleichung eines PT_1-Systems



- **Zerlegung periodischer Funktionen in eine Reihe harmonischer Funktionen.**
- **Bestimmung und Bedeutung des Amplitudenspektrums eines Signals**
- **Bedeutung in den Bereichen**
  - Signalanalyse
  - Schwingungstechnik
  - Akustik

- Eine periodische Funktion kann in eine Funktionenreihe aus **Sinus**- und **Kosinusfunktionen** zerlegt werden.

reelle Koeffizienten

- Reelle Fourier-Reihe $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$

- Komplexe Fourier-Reihe $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$

i.a. komplex

- Betrag-Phasen-Darstellung $f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$

reell

Fourier-Transformation versus Laplace-Transformation

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \qquad F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$e^{-st} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}$$

- Die Fourier-Transformation ist wie die Laplace-Transformation eine **Integraltransformation**.
- Für Funktionen $f(t)$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ entspricht die Laplacetransformierte von $f(t)$ der Fouriertransformierten von $f(t)e^{-\sigma t}$.
- Bereits einfache Funktionen wie z.B. die **Sprungfunktion** $1(t)$ erfüllen die Konvergenzbedingung der Fourier-Transformation nicht.
- Die **Fourier**-Transformation ist besser für die **Analyse** von **Signalen** geeignet.
- Die **Laplace**-Transformation ist besser für die **Analyse** und die Beschreibung von **Systemen** geeignet.

Was ist das Spektrum eines kontinuierlichen Signals ?

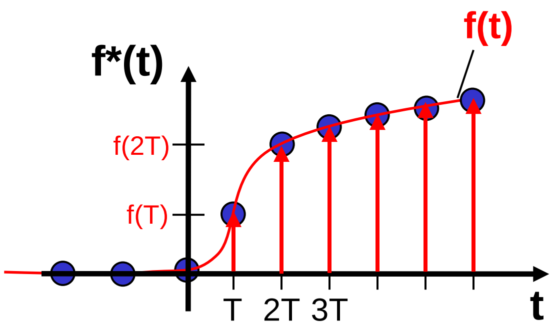
- Das Spektrum $F(j\omega)$ ist die Fourier-Transformierte der Zeitfunktion $f(t)$.
- Das Spektrum gibt an, welche Frequenzen in einem Signal vorkommen und welches Gewicht sie haben.
- Einem periodischen Signal kann über die Fourier-Reihenentwicklung ein diskretes Amplitudenspektrum zugeordnet werden.
- Das Spektrum (Amplitudendichte, Phase) eines nichtperiodischen Signals ist kontinuierlich.
- Die Fourier-Transformation ist nur für kontinuierliche Zeitfunktionen $f(t)$ definiert.

Gesucht ist eine kontinuierliche Darstellung eines zeitdiskreten Signals *f(kT)*

Darstellung eines zeitdiskreten Signals *f(kT)* mit Hilfe einer Folge von Deltaimpulsen:

$$f^*(t) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\,\delta(t-kT)$$



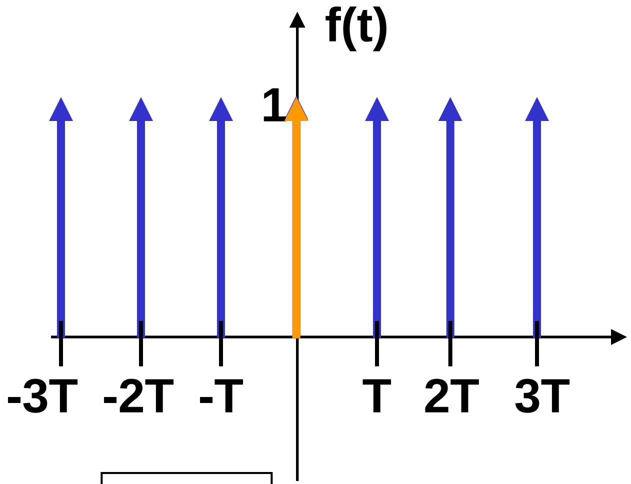
Periodische Zeitfunktion

Ersetzen der Dirac-Impulsfolge durch die komplexe Fourier-Reihe:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) = \frac{1}{T}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\omega_A t}$$

$$\omega_A = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$



Gesucht:

Komplexe Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Fourier-Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Aus der Ausblendeigenschaft des Deltaimpulses folgt:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} e^{-jn\omega_0 \cdot 0} = \frac{1}{T}$$

$\Rightarrow$ **Fourier-Reihe der Folge von Deltaimpulsen:**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

liefert:

$$f^*(t) \;=\; f(t)\frac{1}{T}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{j\nu\omega_A t}\,.$$

Hierauf wird jetzt die Fourier-Transformation angewendet:

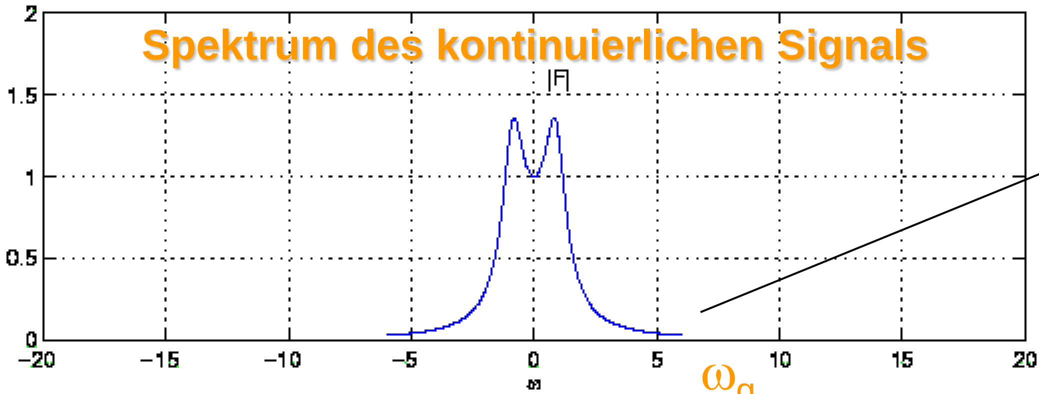
$$\mathcal{F}\{f^*(t)\} \;=\; \frac{1}{T}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f(t)e^{j\nu\omega_A t}\}\,.$$

Mit Hilfe des Frequenzverschiebungssatzes erhält man:

$$F^*(j\omega) \;=\; \frac{1}{T}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F(j(\omega-\nu\omega_A))\,.$$

Spektrum diskreter Signale (3)

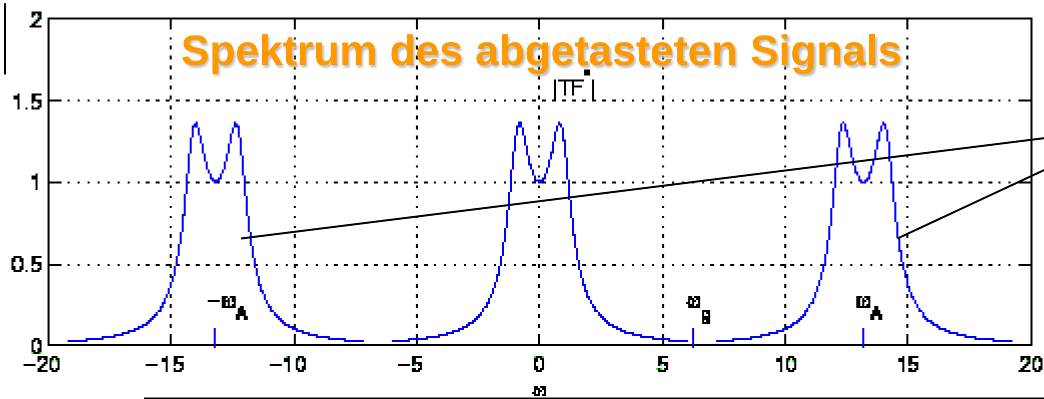
$\left|F(j\omega)\right|$



bandbegrenztes kontinuierliches Signal

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F(j(\omega - \nu\omega_A)) \; .$$

$\left|T \cdot F^*(j\omega)\right|$



Seitenbänder

Spektrum eines zeitdiskreten Signals ist periodisch mit der Periode $\omega_A=2\pi/T$ und mit $1/T$ gewichtet

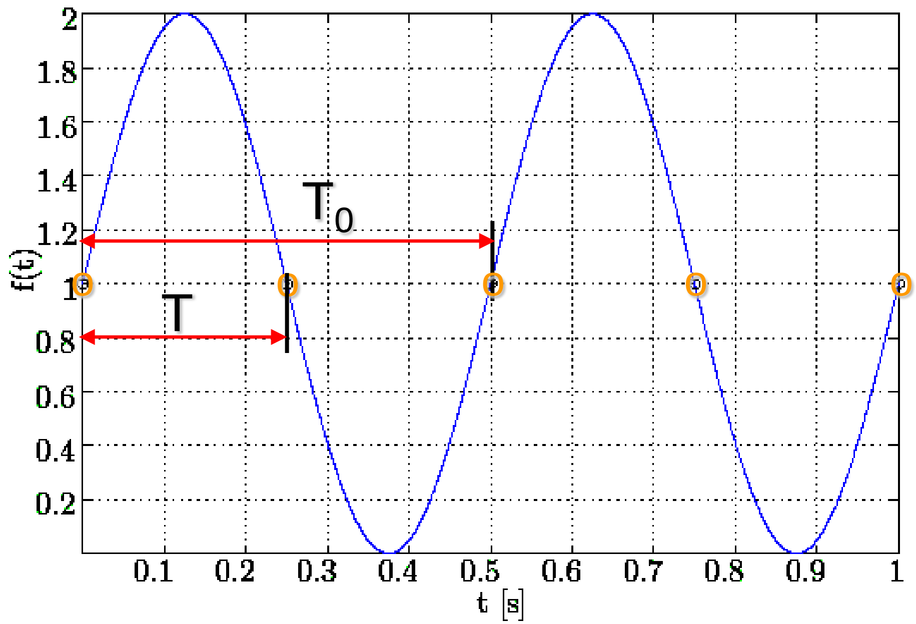


Bild 2.16: Abgetastetes Sinussignal

Periodendauer: $T_0 = 0{,}5$ s

Frequenz: $f_0 = 2$ Hz

Abtastintervall: $T = 0{,}25$ s

Abtastfrequenz: $f_A = 4$ Hz

$\Rightarrow$ **Die abgetasteten Werte des Sinussignals sind von einem Gleichspannungssignal nicht zu unterscheiden, wenn die Abtastfrequenz doppelt so hoch ist, wie die Frequenz des Sinussignals.**

Satz 2.1 Abtasttheorem von Shannon

a) Ein kontinuierliches, bandbegrenztes Signal $f(t)$ dessen Fouriertransformierte

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{2.29}$$

außerhalb des Intervalls $(-\omega_g, \omega_g)$ verschwindet, ist eindeutig durch die äquidistanten Abtastwerte bestimmt, wenn für die Abtast(kreis)frequenz $\omega_A = 2\pi f_A$ gilt:

$$\omega_A > 2\omega_g\ . \tag{2.30}$$

b) Das kontinuierliche Signal $f(t)$ kann dann aus der Abtastfolge $f(k)$ mittels der *Shannon'schen Interpolationsformel* berechnet werden:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\frac{\sin\omega_A(t-kT)/2}{\omega_A(t-kT)/2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\frac{\sin\omega_g(t-kT)}{\omega_g(t-kT)}\ . \tag{2.31}$$

Beispiel: Audio-CD

Frequenzbereich: 5 Hz – 20 kHz

Abtastfrequenz: 44,1 kHz

Nyquistfrequenz $f_A/2$ **liegt** 10 % **über der Grenzfrequenz** 20 kHz

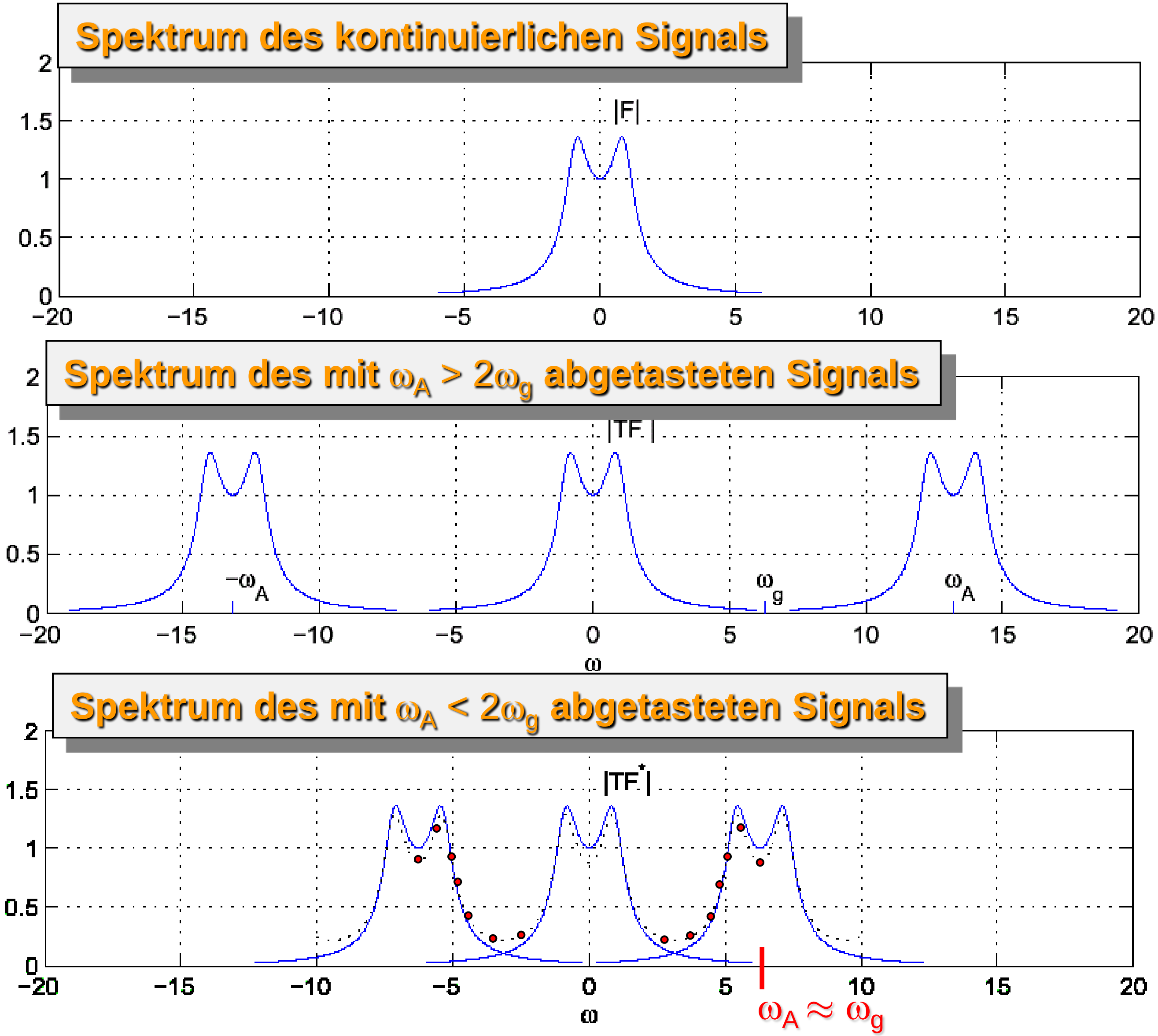
Amplitudenauflösung: 16 bit (1/32767=0,00003)

$\Rightarrow$

Speicherbedarf: 16 bit · 2 · 44100 Hz / 8 = 176,4 KByte / s

$\Rightarrow$ 176,4 KByte / s · 60 s = 10,6 MByte / Minute

Frequenzfaltung oder Aliasing



Frequenzfaltung oder Aliasing (2)

Die Spektren des kontinuierlichen und des diskreten Signals stimmen offensichtlich im Intervall ($-\omega_A/2 \leq \omega \leq \omega_A/2$) überein, wenn die folgenden Forderungen eingehalten werden:

– $F(j\omega)$ muß bandbegrenzt sein, also im Frequenzbereich $|\omega| \geq \omega_g$ identisch verschwinden.

– **Die Abtastkreisfrequenz $\omega_A = 2\pi f_A = 2\pi/T$ muß mindestens doppelt so groß sein, wie die maximale Frequenz ω_g von $F(j\omega)$.**

Frequenzfaltung oder Aliasing (3)

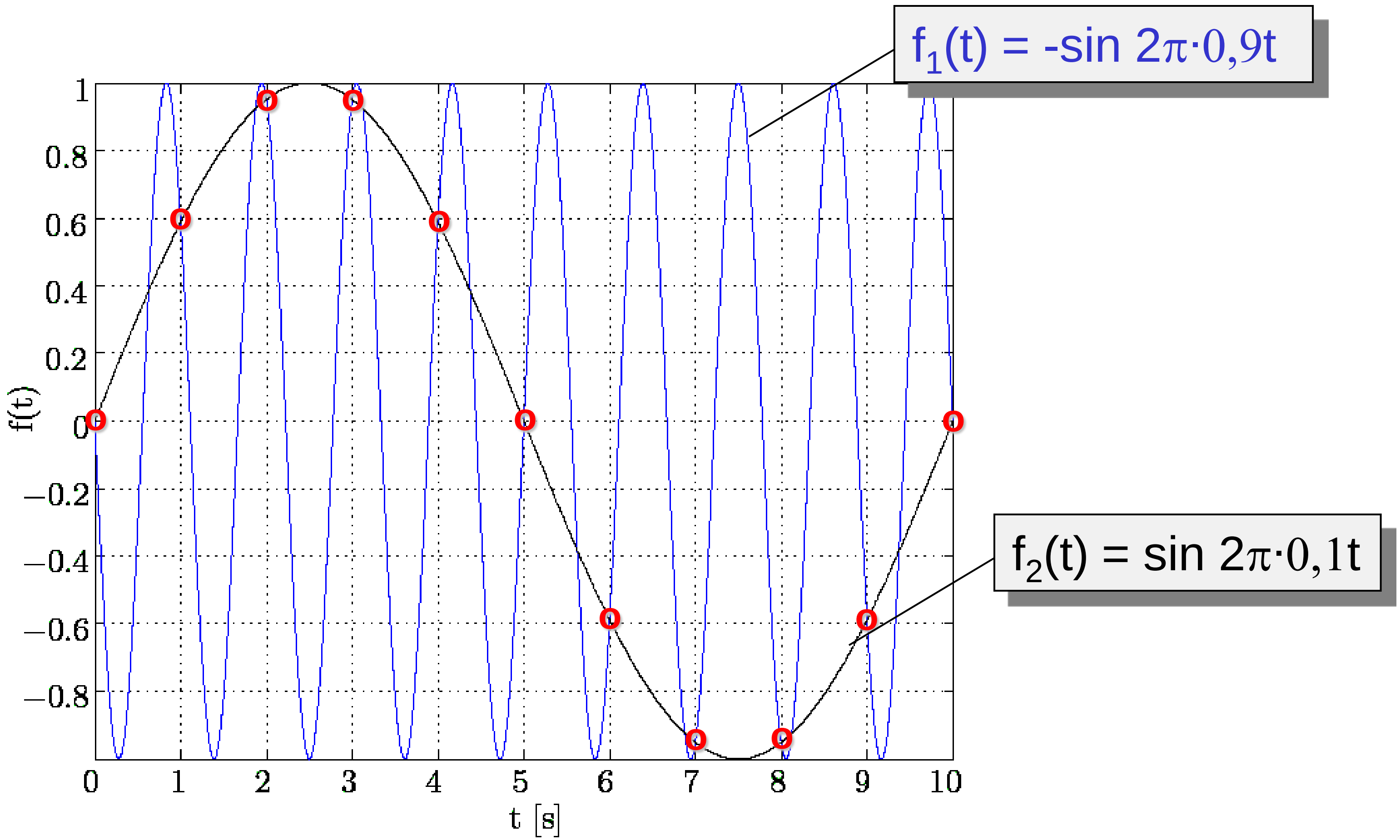


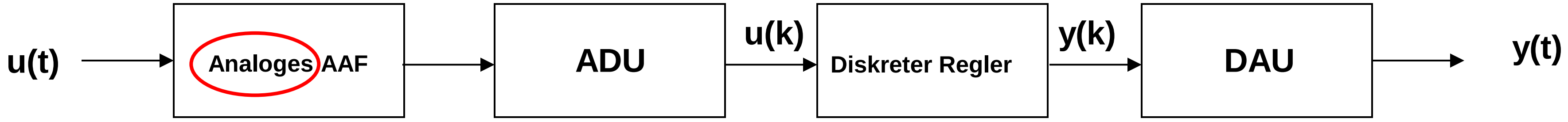
Bild 2.18: Zwei periodische Signale mit den Frequenzen 0,1 Hz bzw. 0,9 Hz, die bei einer Abtastperiode $T = 1$ die gleichen abgetasteten Werte haben.

Frequenzfaltung oder Aliasing (4)

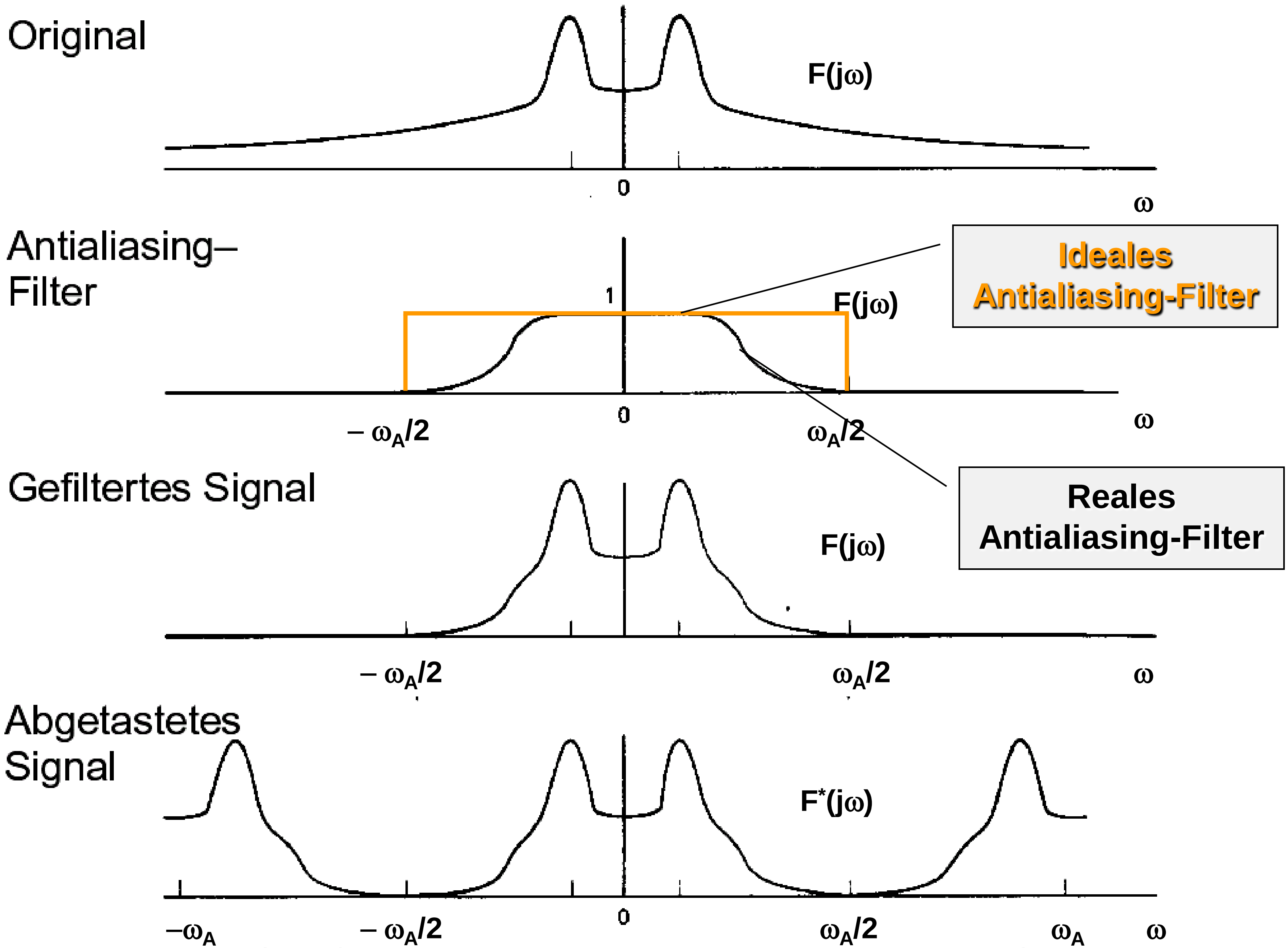
Verhinderung der Frequenzfaltung

- **Bei nicht-bandbegrenzten Signalen muss man vor der Abtastung mit Hilfe eines Tiefpasses (Anti-Aliasing-Filter) Frequenzanteile ab der halben Abtastfrequenz unterdrücken oder am besten vollständig verschwinden lassen.**

- **Bei bandbegrenzten Signalen muss die Abtastfrequenz größer als das Doppelte der höchsten, im Signal vorkommenden Frequenz sein. Wenn nicht möglich, Einsatz eines Anti-Aliasing-Filters.**



Frequenzfaltung oder Aliasing (5)



Abtastfrequenzen in technischen Systemen

	Abtastfrequenz
Regelkreise im Kraftfahrzeug	100 – 150 Hz
Regelkreise im Flugzeug	50 – 100 Hz
Regelkreise in der Verfahrenstechnik	1 – 10 Hz
CD-Audio-Aufzeichnung	44,1 kHz
Signalverarbeitung mit Mikrocontroller	bis 50 MHz

Beschreibung von Systemen

Kontinuierliche Systeme

Beschreibung mittels Differentialgleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} u(t)$$

Beschreibung durch Übergangsfunktion *h(t)* und Gewichtsfunktion *g(t)*

Zeitdiskrete Systeme

Beschreibung mittels Differenzengleichungen

$$y(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i\, y(k-i) = \sum_{j=0}^{n} b_j\, u(k-j)$$

Beschreibung durch Übergangsfolge *h(k)* und Gewichtsfolge *g(k)*

Gegeben ist die DGL eines PT_1-Systems

$$T_1\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Abtastperiode

Ersetzen der Differentiation durch Differenzenquotienten liefert:

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_0 u(k) \quad \textbf{mit} \quad a_1 = -\,{}^{T_1}\!/_{(T_1+T)}, \quad b_0 = {}^{T}\!/_{(T_1+T)}$$

Gesucht die Antwort auf u(k) = 1(k), (y(k) = 0 für k ≤ 0)

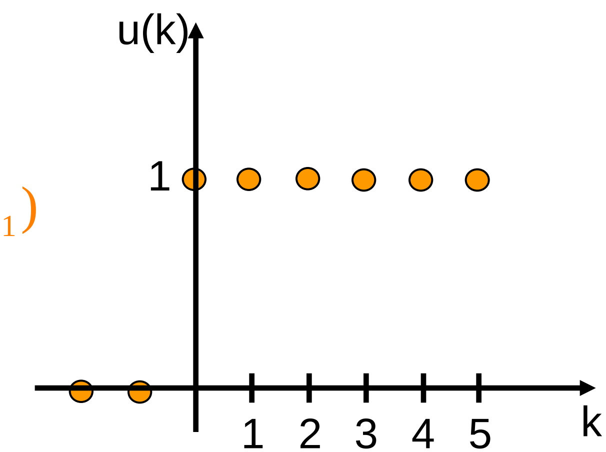
$$k=0: \qquad y(0) = 0$$

$$k=1: \quad y(1) = -a_1 \cancelto{0}{y(0)} + b_0 u(1) = b_0$$

$$k=2: \quad y(2) = -a_1 y(1) + b_0 u(2) = b_0 - a_1 b_0 = b_0(1-a_1)$$

$$k=3: \quad y(3) = -a_1 y(2) + b_0 u(3) = b_0 - a_1 b_0 (1-a_1)$$

$$= b_0(1 - a_1 + a_1^2)$$



$$\Rightarrow \qquad \boxed{y(k) = b_0 \sum_{i=1}^{k} (-a_1)^{i-1}}$$

Übergangsfolge

$$h(k) = b_0 \sum_{i=1}^{k} (-a_1)^{i-1}$$

$$a_1 = -\frac{T_1}{T_1 + T}$$

$|a_1| < 1$ für $T > 0$

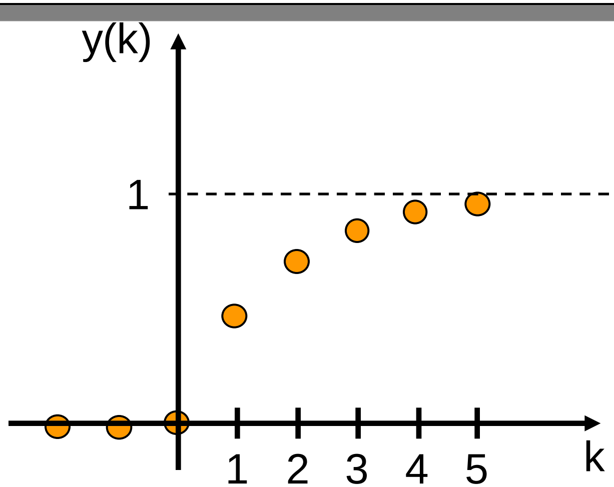
immer erfüllt !

konvergiert für $|a_1| < 1$.

Für $T_1 = T = 1$ erhält man $a_1 = -0{,}5$ und $b_0 = 0{,}5$ und es ergibt sich:

$$y(k) = h(k)$$

$$= \{0;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 0{,}875; \ldots\}$$



Beispiel: Sprungantwort (3)

Übergangsfolgen für verschiedene Abtastperioden T

$$y(k) = 0{,}5 \cdot y(k-1) + 0{,}5 \cdot u(k-1) \text{ für } T = T_1 = 1$$