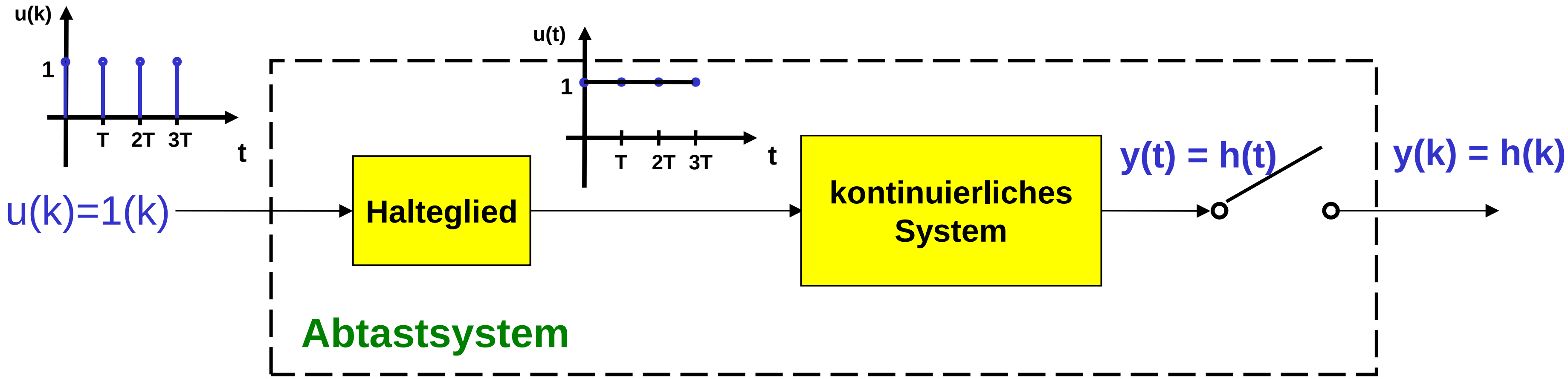
Zusammenfassung der 4. Vorlesung



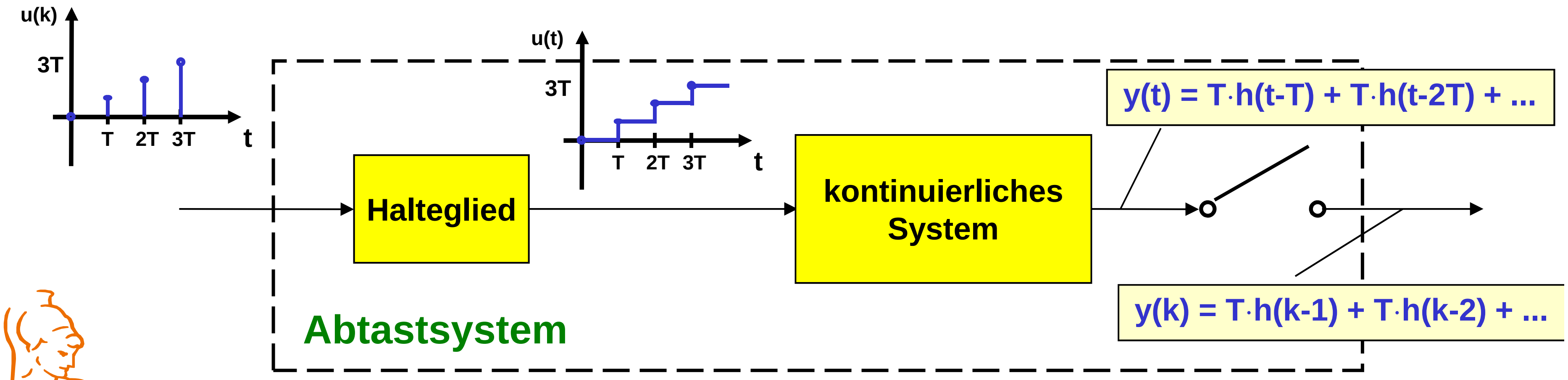
- **z-Übertragungsfunktionen von Abtastsystemen:**
  - **A/D- und D/A-Umsetzer werden mit der Regelstrecke zusammengefaßt (Abtastsystem).**

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\{h(kT)\}$$

Übergangsfolge des kontinuierlichen Systems

Zusammenfassung der 4. Vorlesung

- **Übergangsfolge der (sprung-)äquivalenten z-Übertragungsfunktion stimmt für sprungförmige Anregungen mit den Werten der kontinuierlichen Übergangsfunktion an den Abtastpunkten überein.**
- **Für rampenförmige Eingangssignale trifft dies nicht zu !!!!!**



Zusammenfassung der 4. Vorlesung

- **Stabilität zeitdiskreter Systeme.**
  - **Zeitbereich:**

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} | g(k) | = 0}$$

  - **Frequenzbereich:**

    Pole von *G(z)* müssen innerhalb des Einheitskreises liegen.

Zusammenfassung der 4. Vorlesung

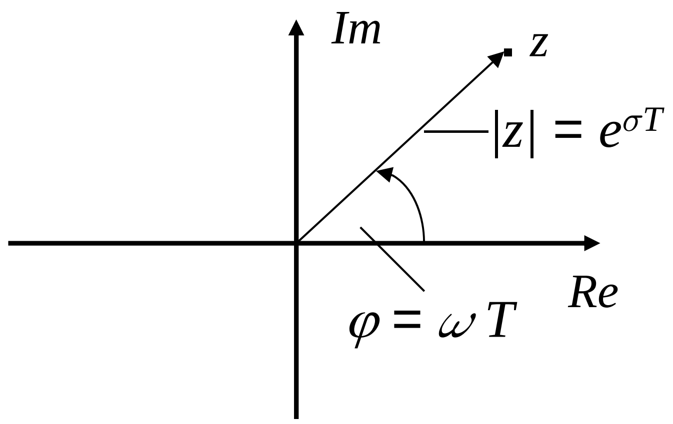
Zusammenhang zwischen den Polen des kontinuierlichen und des diskreten Systems

- **Betrag von z hängt nur vom Realteil σ ab:**

$$|z| = |e^{(\sigma + j\omega)T}| = |e^{\sigma T}| \cdot |e^{j\omega T}| \boxed{= e^{\sigma T}}$$

- **Das Argument von z wird nur von ω bestimmt:**

$$\boxed{\arg z = \varphi = \omega T}$$



Zusammenfassung der 4. Vorlesung

- **Nullstellen von Abtastsystemen**
  - **Untersuchung einer Reihenschaltung von I-Systemen.**
    - **Kontinuierliche Üfkt. hat keine Nullstellen.**
    - z**-Üfkt. des Abtastsystems hat** $n\text{-}1$ **Nullstellen.**
    - **Das Zählerpolynom der** z**-Üfkt. des Abtast-systems ist ein sogenanntes Euler-Frobenius-Polynom.**
    - **Werden mehr als 2 Integratoren hinterein-ander geschaltet, dann ist das Abtastsystem für** $T \rightarrow 0$ **immer nichtminimalphasig.**
  - **Eigenschaften von Euler-Frobenius-Polynome.**

Zusammenfassung der 4. Vorlesung

- **Nullstellen von Abtastsystemen**
  - **Unterscheidung zwischen Diskretisierungs- und den eigentlichen Nullstellen.**
  - **Diskretisierungsnullstellen sind vom Differenzgrad des kontinuierlichen Systems und der Abtastzeit abhängig und streben für $T \to 0$ gegen die Nullstellen der entsprechenden Euler-Frobenius-Polynome.**
  - **Die eigentlichen Nullstellen wandern für $T \to 0$ gegen den Wert $z = 1$.**
  - **Ansonsten existiert zwischen den kontinuierlichen und den eigentlichen diskreten Nullstellen kein allgemeingültiger Zusammenhang.**

Zeitdiskretes Zustandsraummodell

Kontinuierliche Systeme	Zeitdiskrete Systeme

Zustandsgleichung

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t)$$

Vektordifferentialgleichung 1. Ordnung

Zustandsdifferenzengleichung

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}\,u(k)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Differenzengleichungen 1. Ordnung (Differentiation $\rightarrow$ Linksverschiebung)

Ausgangsgleichung

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) + du(t)$$

Ausgangsgleichung

$$y(k) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(k) + d\,u(k)$$

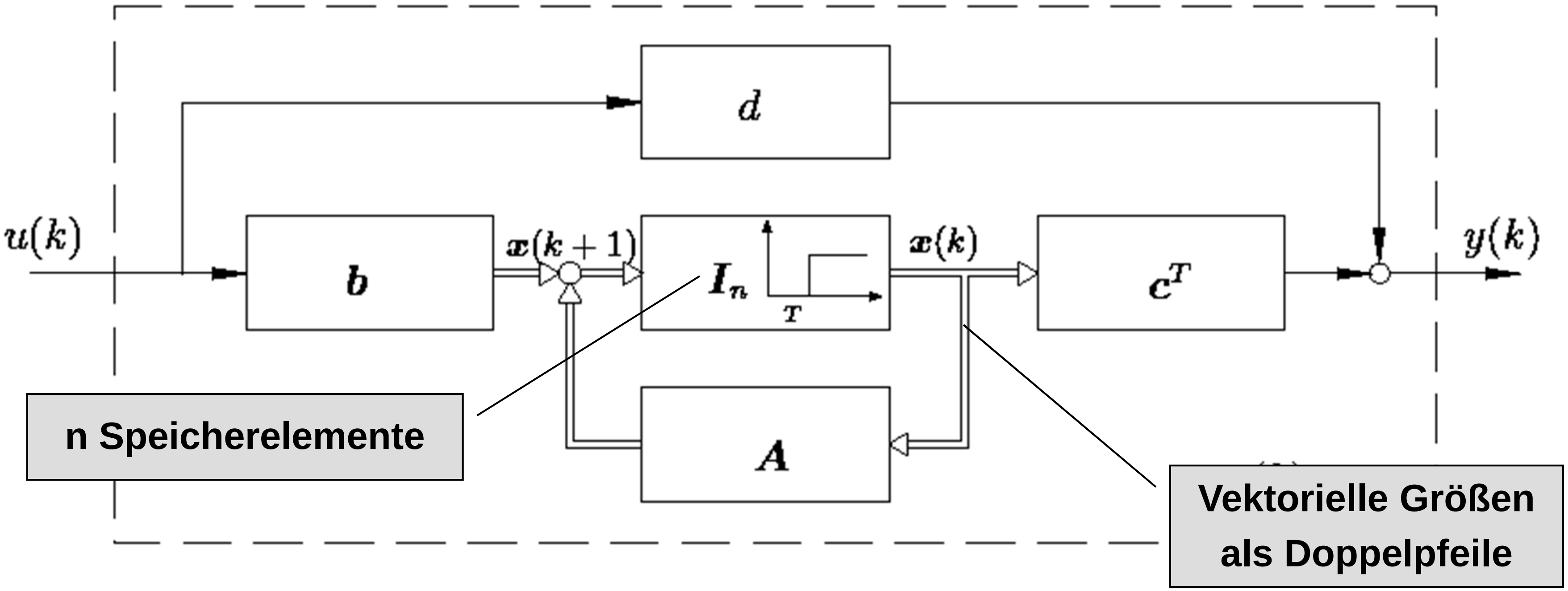
Algebraische Gleichung

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad u \in \mathbb{R} \quad ; \quad y \in \mathbb{R}$$

Zeitdiskretes Zustandsraummodell (2)

Blockschaltbild des diskreten Zustandsraummodells

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}\,u(k) \\
y(k) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(k) + d\,u(k)
\end{aligned}
$$



Zeitdiskretes Zustandsraummodell (3)

Zustandsraummodell aus Übertragungsdifferenzengleichung

Gegeben:

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_0 u(k)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Wahl der Zustandsgrößen $x_1(k)$, $x_2(k)$,..., $x_n(k)$:

$$x_1(k) = y(k)$$

$$x_2(k) = y(k+1) \qquad = x_1(k+1)$$

$$x_3(k) = y(k+2) \qquad = x_2(k+1)$$

$$\vdots$$

$$x_n(k) = y(k+n-1) \quad = x_{n-1}(k+1)$$

$$y(k+n) = x_n(k+1) = -a_{n-1}x_n(k) - \cdots - a_1 x_2(k) - a_0 x_1(k) + b_0 u(k)$$

Zeitdiskretes Zustandsraummodell (4)

Zustandsraummodell aus Übertragungsdifferenzengleichung

Gegeben:

$$y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_0 u(k)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zustandsraummodell:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]\, \boldsymbol{x}(k) \quad .$$

Systemmatrix A in Frobeniusform

Lösung der Zustandsgleichung

Kontinuierliche Systeme

Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0$$

mit der Matrixexponentialfkt.

$$\boxed{e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\boldsymbol{A}^2}{3!}t^3 + \ldots}$$

Transitionsmatrix

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}}$$

Zeitdiskrete Systeme

Lösung der homogenen Differenzengleichung

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)\ , \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0)$$

$$, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$k=0: \quad \boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)$$

$$k=1: \quad \boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(0)$$

Allgemein: $\boxed{\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0)}$

Transitionsmatrix: $\boxed{\boldsymbol{\Phi}(k) = \boldsymbol{A}^k}$

Lösung der Zustandsgleichung (2)

Kontinuierliche Systeme	**Zeitdiskrete Systeme**

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für $x_0 = 0$.

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

Faltungsintegral

$$\boxed{\boldsymbol{x}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau}$$

Lösung der inhomogenen Differenzengleichung für $x_0 = 0$.

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}u(k), \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

$$k=0: \quad \boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{b}u(0)$$

$$k=1: \quad \boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{b}u(1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}u(0) + \boldsymbol{b}u(1)$$

$$k=2: \quad \boldsymbol{x}(3) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(2) + \boldsymbol{b}u(2) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}u(0) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}u(1) + \boldsymbol{b}u(2)$$

Faltungssumme

$$\boxed{\boldsymbol{x}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{\Phi}(k-1-i)\boldsymbol{b}u(i)}$$

Lösung der Zustandsgleichung (3)

Kontinuierliche Systeme

Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

Systemausgang

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) + du(t)$$

$$= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau + du(t)$$

Zeitdiskrete Systeme

Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1-i}\boldsymbol{b}u(i)$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(k-1-i)\boldsymbol{b}u(i)$$

Systemausgang

$$y(k) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(k) + du(k)$$

$$= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\Phi}(k-1-i)\boldsymbol{b}u(i) + du(k)$$

Gewichtsfolge anhand des Zustandsraummodells

Kontinuierliche Systeme

Gewichtsfunktion für $x_0 = 0$.

$$u(t) = \delta(t)$$

$$y(t) = \int_0^t \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{b}\delta(\tau)d\tau + d\delta(t)$$

$$g(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{b} + d\delta(t)$$

$$\boxed{g(t) = \boldsymbol{c}^T e^{At}\boldsymbol{b} + d\delta(t)}$$

für *d = 0*

Zeitdiskrete Systeme

Gewichtsfolge für $x_0 = 0$.

$$\boxed{u(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad k = 0 \\ 0 & \text{für} \quad k > 0 \end{cases}}$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{\Phi}(k-1-i)\boldsymbol{b}\delta(i) + d\delta(k)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{A}^{k-1-i}\boldsymbol{b}\delta(i) + d\delta(k)$$

$$\boxed{g(k) = \begin{cases} d & \text{für} \quad k = 0 \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b} & \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}}$$

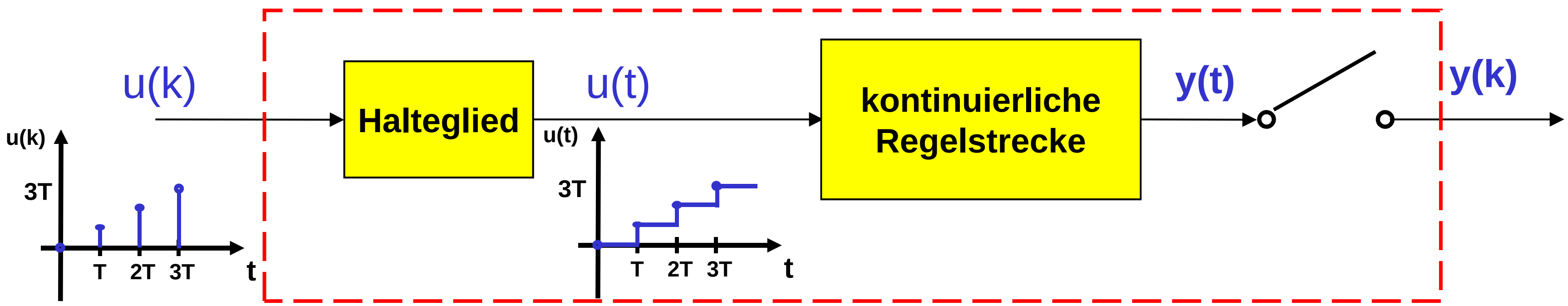
Äquivalentes zeitdiskretes Zustandsraummodell

Gegeben ist das kontinuierliche Zustandsraummodell der Regelstrecke:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t)$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t)$$

Gesucht ist das zugehörige zeitdiskrete Zustandsraummodell für die folgende Konfiguration:



$$u(t) = const. \quad \text{im Intervall} \quad [t_k, t_{k+1}]$$

Äquivalentes zeitdiskretes Zustandsraummodell (2)

Lösung der kontinuierlichen Zustandsgleichung:

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

Für $t = t_{k+1}\,,\quad t_0 = t_k$ **erhält man**

$$\boldsymbol{x}(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}\boldsymbol{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

und für äquidistante Abtastung

$$t_{k+1} - t_k = T \quad , \qquad \forall \quad k = 0, 1, 2, \ldots \,,$$

$$\boldsymbol{x}(t_{k+1}) = e^{AT}\boldsymbol{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau$$

Äquivalentes zeitdiskretes Zustandsraummodell (3)

Im Integrationsintervall ist $u(\tau) = u(t_k) = const.$

$$\boldsymbol{x}(t_{k+1}) = e^{AT}\boldsymbol{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau\, \boldsymbol{b} u(t_k)$$

Für die Substitution $\tau' = f(\tau) = t_{k+1} - \tau$ **erhält man** $d\tau' = \frac{d\tau'}{d\tau} d\tau = -d\tau$

und die neuen Integrationsgrenzen:

$\tau = t_{k+1} \Rightarrow \tau' = 0$ **und** $\tau = t_k \Rightarrow \tau' = t_{k+1} - t_k = T$

$$\hookrightarrow \quad \boldsymbol{x}(t_{k+1}) = e^{AT}\boldsymbol{x}(t_k) + \int_{T}^{0} e^{A\tau'}(-d\tau')\boldsymbol{b} u(t_k)$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{x}(k+1) = e^{AT}\boldsymbol{x}(k) + \int_{0}^{T} e^{A\tau'}\boldsymbol{b}\, d\tau' u(k)}$$

Äquivalentes zeitdiskretes Zustandsraummodell (4)

Zustandsgleichung des zeitdiskreten Zustandsraummodell:

$$\boxed{\boldsymbol{x}(k+1) = e^{AT}\boldsymbol{x}(k) + \int_0^T e^{A\tau'}\boldsymbol{b}\,d\tau'\,u(k)}$$

Vergleich mit der Definition des zeitdiskreten Zustandsraummodells

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}_d u(k),$$

$$y(k) = \boldsymbol{c}_d^{\,T}\boldsymbol{x}(k) + d_d u(k)$$

liefert:

$$\boxed{\boldsymbol{A}_d = e^{AT}} \qquad \boxed{\boldsymbol{b}_d = \int_0^T e^{A\tau'}\boldsymbol{b}\,d\tau'}$$

$$\boxed{\boldsymbol{c}_d^T = \boldsymbol{c}^T} \qquad \boxed{d_d = d}$$

Äquivalentes zeitdiskretes Zustandsraummodell (5)

Beispiel:

Gegeben die DGL eines PT$_1$-Systems:

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Aufstellen eines kontinuierlichen Zustandsraummodells

$$x_1(t) = y(t) \Longrightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{T_1} x_1(t) + \frac{1}{T_1} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{A} = a = -\frac{1}{T_1}\ , \ \boldsymbol{b} = b = \frac{1}{T_1}$$

$$\boldsymbol{c}^T = c = 1\ , \ d = 0$$

Äquivalentes zeitdiskretes Zustandsraummodell (6)

Äquivalentes zeitdiskretes Zustandsraummodell:

$$\boxed{\boldsymbol{A}_d = a_d = e^{aT}} \quad = e^{-\frac{1}{T_1}T}$$

$$\boxed{\boldsymbol{b}_d = b_d = \int_0^T e^{a\tau'} b \, d\tau'}$$

$$= \int_0^T e^{-\frac{1}{T_1}\tau'} \frac{1}{T_1} d\tau' \quad = -T_1 e^{-\frac{\tau'}{T_1}} \frac{1}{T_1} \Big|_0^T$$

$$= -e^{-\frac{T}{T_1}} + e^{-\frac{0}{T_1}} \quad = -e^{-\frac{T}{T_1}} + 1$$

$$= 1 - a_d$$

$\hookrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(k+1) &= a_d x_1(k) + (1-a_d)u(k) \\ y(k) &= x_1(k) \end{aligned}}$$

Äquivalentes zeitdiskretes Zustandsraummodell (7)

Für $T_1 = T = 1$ erhält man:

$$x_1(k+1) = 0{,}368 \cdot x_1(k) + 0{,}632 \cdot u(k)$$

Gesucht die Antwort auf $u(k) = 1(k)$, $x_1(0) = 0$

$k = 0:$

$$y(0) = x_1(0) \quad \boxed{=0}$$

$$x_1(1) = 0{,}368 \cdot \overset{0}{\cancel{x_1(0)}} + 0{,}632 \cdot u(0)$$
$$= 0{,}632$$

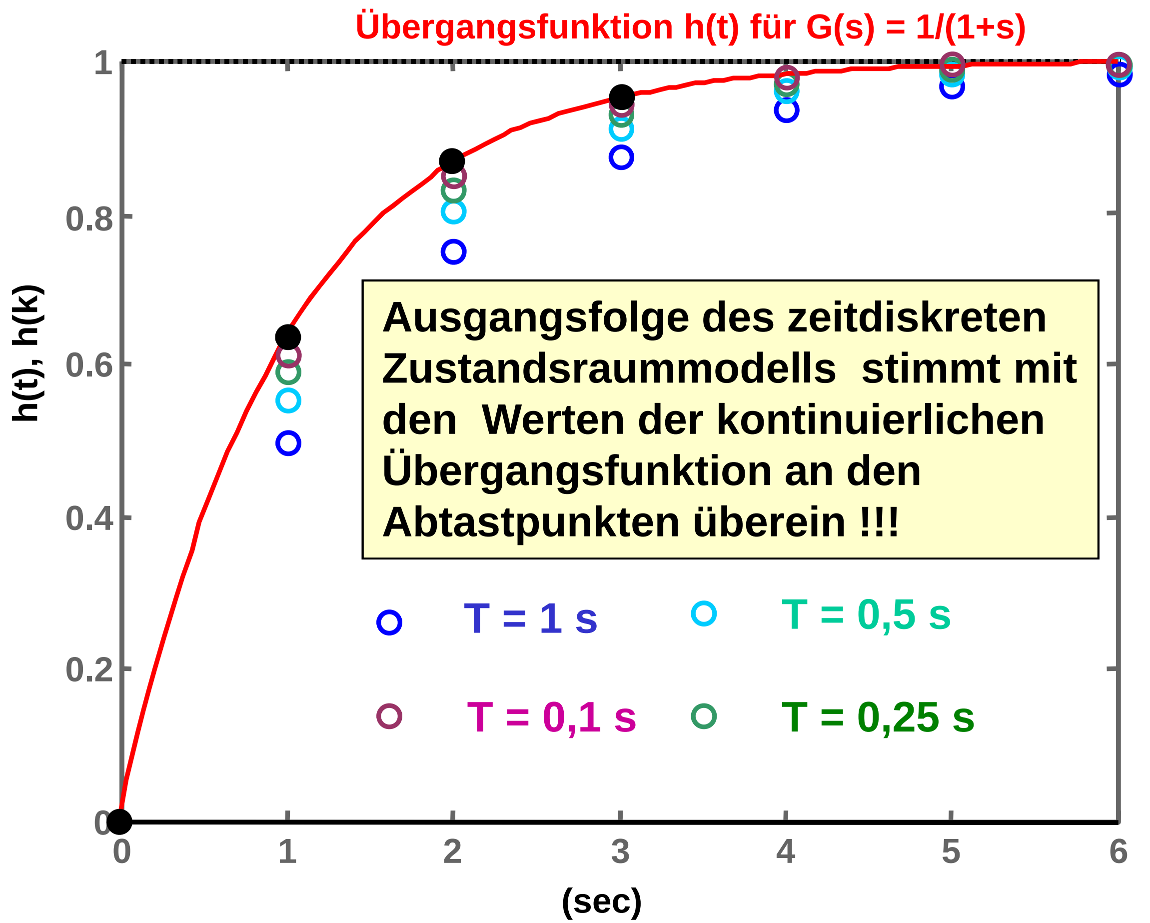
$k = 1:$

$$y(1) = x_1(1) \quad \boxed{=0{,}632}$$

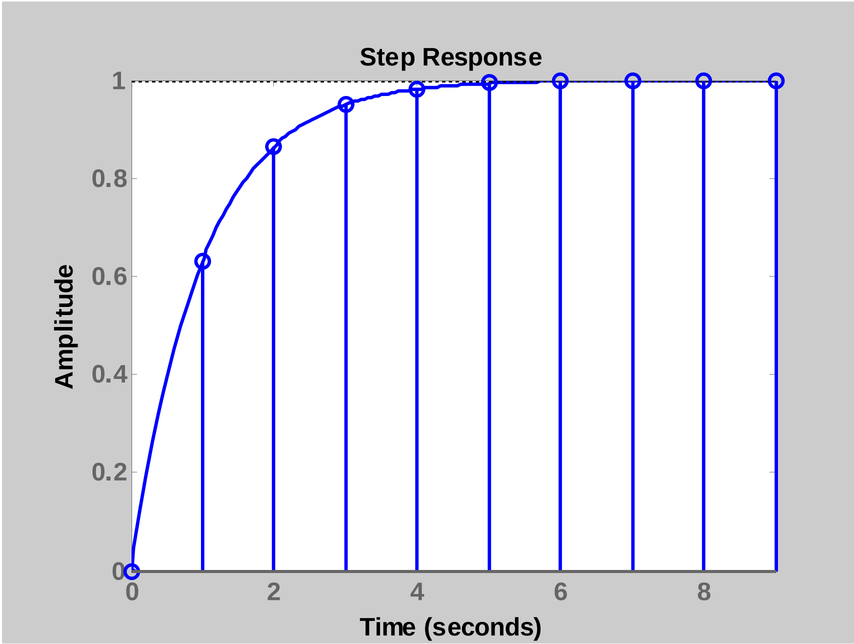
$$x_1(2) = 0{,}368 \cdot x_1(1) + 0{,}632 \cdot u(1)$$
$$= 0{,}368 \cdot 0{,}632 + 0{,}632$$
$$= 0{,}865$$

$k = 2:$

$$y(2) = x_2(1) \quad \boxed{=0{,}865}$$



Matlab-Beispiel: Diskretes Zustandsraummodell




```
%
% Äquivalentes zeitdiskretes Zustandsraummodell eines PT1-Systems
%
T1 = 1;
a = -1/T1;
b = 1/T1;
c = 1;
d = 0;
%
% Kontinuierliches Zustandsraummodell
%
sys_k = ss(a,b,c,d)
%
T = 1  % Abtastintervall
%
sys_d = c2d(sys_k,T) % Conversion of continuous-time models to discrete time.
%
figure(1)
%
step(sys_k)        % kontinuierliche Sprungantwort
hold on
[y,t] = step(sys_d,10);      % diskrete Sprungantwort
stem(t,y)
```

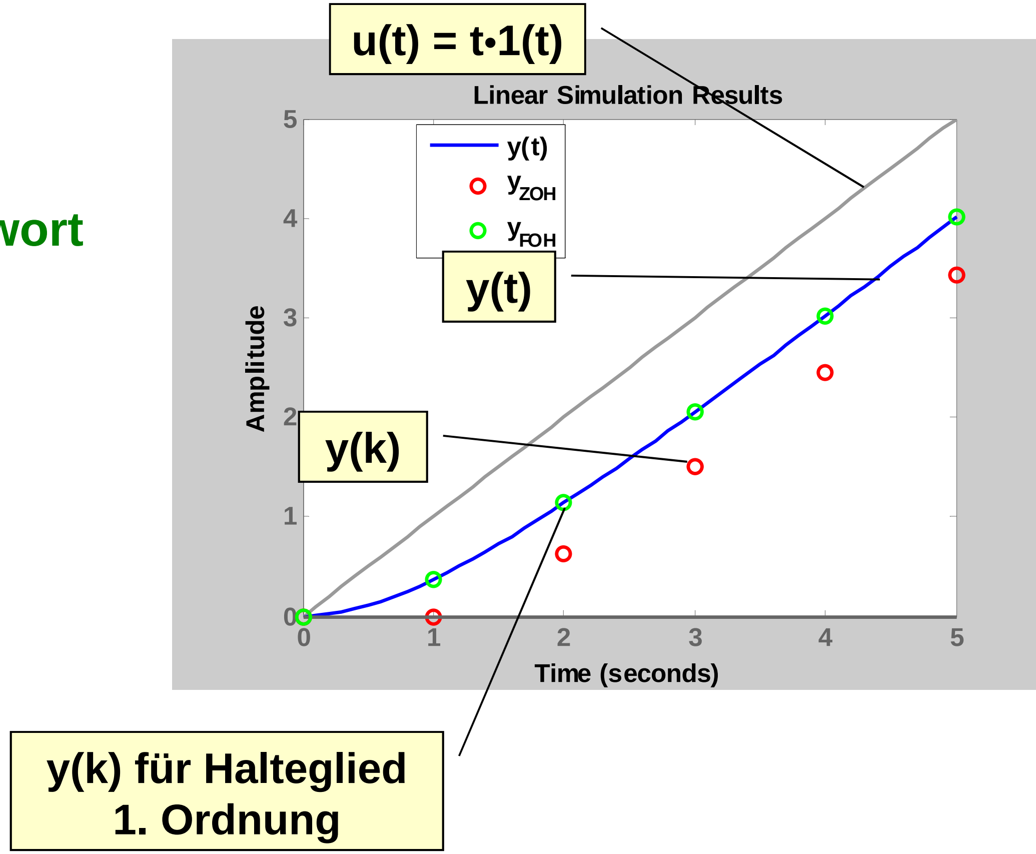
Matlab-Beispiel: Diskretes Zustandsraummodell (2)

```
t = 0:0.1:5;
u = t;

% kontinuierliche Rampenantwort
lsim(sys_k,u,t)

%
hold on
t = 0:1:5;
u = t;

% diskrete Rampenantwort
[y1,t] = lsim(sys_d,u,t);
stem(t,y1,'r','LineStyle','none')
```




```
% diskrete Rampenantwort mit Halteglied 1. Ordnung

[y2,t] = lsim(c2d(sys_k,T,'foh'),u,t)
stem(t,y2,'g','LineStyle','none')
legend('y(t)','y_{ZOH}','y_{FOH}')
```

Stabilität des Zustandsraummodells

Kontinuierliche Systeme

Zeitdiskrete Systeme

Charakteristische Gleichung

$$\boxed{C(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

$$\boxed{C(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A_d})}$$

Asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte λ in der linken λ-Halbebene liegen.

Asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte λ im Inneren des Einheitskreises liegen.

w-Transformation

Durch die Transformation

$$\boxed{w = \frac{z-1}{z+1},}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} z = 1 & \rightarrow & w = 0 \\ z = j & \rightarrow & w = j \\ z = -j & \rightarrow & w = -j \end{array}}$$

***w*-Transformation genannt, bildet man das Innere des Einheitskreises der *z*-Ebene in die linke *w*-Ebene ab.**

Löst man $\boxed{w = \frac{z-1}{z+1},}$ **nach *z* auf, so erhält man:** $\boxed{z = \frac{1+w}{1-w}}$

➥ **Bei einem stabilen zeitdiskreten System werden alle Wurzeln z_i der charakteristischen Gleichung**

$$\boxed{C(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 \;=\; 0}$$

durch Anwendung dieser Transformation in die linke *w*-Ebene abgebildet.

w-Transformation (2)

Anwendung von

$$\boxed{z = \frac{1+w}{1-w}}$$

auf $\boxed{C(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 \;=\; 0}$

liefert $\boxed{a_n\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{1+w}{1-w}\right) + a_0 \;=\; 0}$

bzw. $\boxed{\tilde{\alpha}_n w^n + \tilde{\alpha}_{n-1} w^{n-1} + \ldots + \tilde{\alpha}_1 w + \tilde{\alpha}_0 \;=\; 0.}$

↪ **Auf dieses Polynom kann dann wieder das Hurwitz-Kriterium angewendet werden.**

w-Transformation mit Matlab

```
%
%  Anwendung der w-Transformation mit Hilfe der Symbolic Math Toolbox
%
w=sym('w')           % Definition von w als symbolische Variable
%
z=(1+w)/(1-w)
%
% Beispiel aus Unbehauen: Regelungstechnik II, S. 139
%
f_z = 2*z^4 - 3*z^3 + 2*z^2 – z + 1
%
f_w=simple(f_z * (1-w)^4);  % Multiplikation mit (1-w)^n und Vereinfachung
%
f_w =

9*w^4 + 8*w^3 + 14*w^2 + 1
```

Kein Hurwitzpolynom, da der Koeffizient a_1 nicht vorhanden ist !!!!