

- **Beispiel:** Übergangs- und Gewichtsfolge mit Hilfe der Differenzengleichung.
Vergleich mit den kontinuierlichen Funktionen.
- **Zusammenhang Gewichts- und Übergangsfolge:**

$$g(k) = h(k-1) - h(k), \quad h(k) = \sum_{j=1}^k g(j-1)$$

- **z-Transformation**
 - **Motivation:** Anwendung der **Laplace-Transformation** liefert immer eine transzendente Funktion.
 - **Lösung:** Einführung der **z-Transformation**



$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

mit $z = e^{sT}$

z-Transformation

- Abbildung der **s-Ebene** in die **z-Ebene** ($z = e^{sT}$).
- **Beispiel:** z-Transformierte der Sprungfolge
($F(z) = z/(z-1)$).
- **Eigenschaften der z-Transformation**
 - **Rechtsverschiebungssatz**
 - **Faltungssatz**
 - **Grenzwertsätze**



z-Transformation

- Übertragungsfunktion diskreter Systeme: $G(z) = Y(z)/U(z)$.
- **Beispiel:** z-Übertragungsfunktion eines **PT₁-Systems**.
- **Pole** und **Nullstellen** der z-Übertragungsfunktion.

$$G(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n} = \frac{Z(z)}{N(z)}$$

Die **Pole** der z-Übertragungsfunktion sind die Lösungen der Gleichung

$$N(z) = 0$$

Die **Nullstellen** der z-Übertragungsfunktion sind die Lösungen der Gleichung

$$Z(z) = 0$$



- Zusammenhang Gewichtsfolge und z-Übertragungsfkt.:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g(k)\}$$

- Ermittlung der **Systemverstärkung** von kontinuierlichen und zeitdiskreten Systemen mittels der Übertragungsfkt.

Kontinuierliche Systeme

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$$

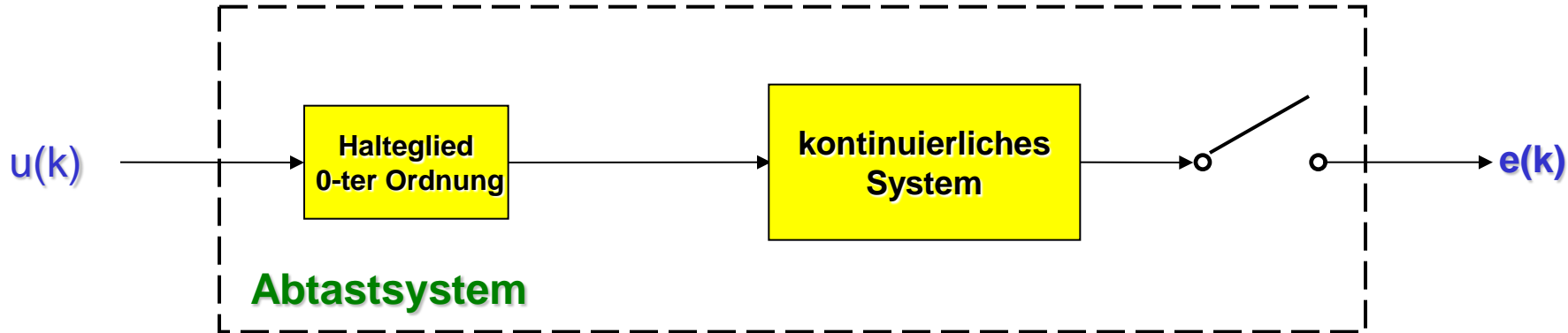
$$K = \frac{b_0}{a_0}$$

Zeitdiskrete Systeme

$$K = \lim_{z \rightarrow 1} z \cdot G(z) = G(1)$$

$$K = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$





➤ **z-Übertragungsfunktionen von Abtastsystemen:**

- **A/D- und D/A-Umsetzer werden mit der Regelstrecke zusammengefaßt (Abtastsystem).**

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\{h(kT)\}$$

Übergangsfolge des
kontinuierlichen
Systems



Gegeben ist die DGL der kontinuierlichen Regelstrecke

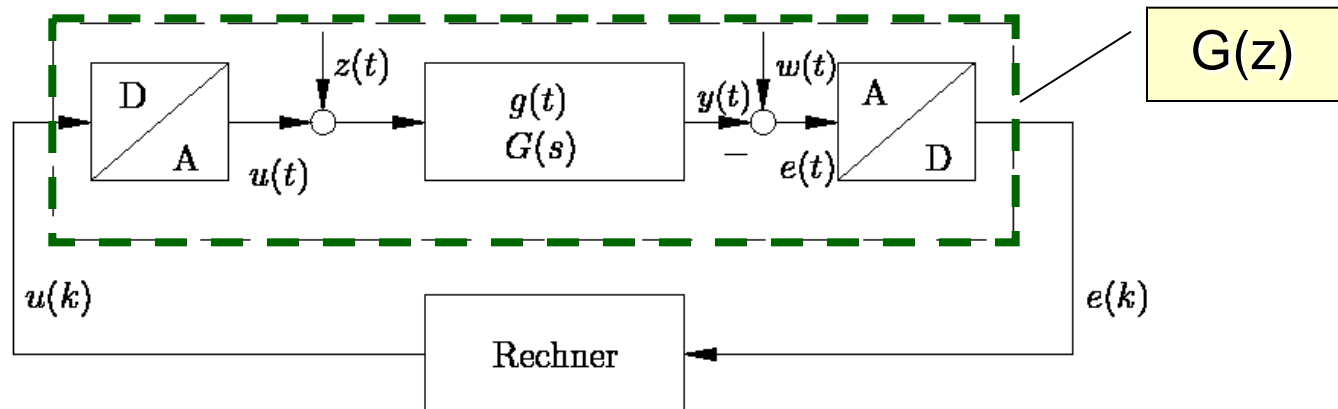
$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Anwendung des Differentiationssatzes der Laplace-Transformation:

$$T_1 s Y(s) + Y(s) = U(s)$$

$$Y(s)(T_1 s + 1) = U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + T_1 s}$$

Gesucht ist das äquivalente zeitdiskrete System $G(z)$?



Für Halteglied 0-ter Ordnung und ideale Abtastung erhält man:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\{h(kT)\}$$

Übergangsfolge der
Regelstrecke

Gesucht ist zunächst die kontinuierliche Sprungantwort ?

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{1 + T_1 s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(1 + T_1 s)}$$

Sprungantwort im Zeitbereich
mit Hilfe der Korrespondenz 6
in SRT-Tabelle A.2:

6

$$(1 - e^{-t/T_1}) \cdot 1(t)$$

$$\frac{1}{s(1 + sT_1)}$$

$$\Rightarrow h(t) = y(t) = 1 - e^{-t/T_1} \Rightarrow h(kT) = h(t) \big|_{t=kT} = 1 - e^{-kT/T_1}$$



$$\mathcal{Z}\{h(kT)\} = \mathcal{Z}\{1 - e^{-kT/T_1}\} = \mathcal{Z}\{1(kT)\} - \mathcal{Z}\{e^{-kT/T_1}\}$$

Korrespondenz 2
Tabelle 3.3

$$= \frac{\cancel{z}}{z - \cancel{1}} - \frac{\cancel{z}}{z - e^{-T/T_1}}$$

Korrespondenz 5
Tabelle 3.3 $\mathcal{Z}\{e^{-a \cdot kT}\} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$

$$G(z) = \frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}} \cdot \mathcal{Z}\{h(kT)\}$$

$$= 1 - \frac{z-1}{z - e^{-T/T_1}}$$

$$= \frac{\cancel{z} - e^{-T/T_1} - (\cancel{z} - 1)}{z - e^{-T/T_1}}$$

$$= \frac{1 - e^{-T/T_1}}{z - e^{-T/T_1}}$$



$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} - e^{-T/T_1} z^{-1}}{1 - e^{-T/T_1} z^{-1}}$$



$$Y(z) - e^{-T/T_1} z^{-1} Y(z) = z^{-1} (1 - e^{-T/T_1}) U(z)$$

Differenzgleichung durch Anwendung des Rechtsverschiebungssatzes:

$$f(k-i) \quad \circ \text{---} \bullet \quad z^{-i} F(z)$$

$$y(k) - e^{-T/T_1} y(k-1) = (1 - e^{-T/T_1}) u(k-1)$$

Für $T = T_1 = 1$ ergibt sich:

$$y(k) - 0,368 \cdot y(k-1) = 0,632 \cdot u(k-1)$$



$$y(k) = 0,368 \cdot y(k-1) + 0,632 \cdot u(k-1)$$

Gesucht die Antwort auf $u(k) = 1(k)$, ($y(k) = 0$ für $k < 0$)

$k = 0:$

$$y(0) = 0,368 \cdot \overset{0}{y(-1)} + 0,632 \cdot \overset{0}{u(-1)} = 0$$

$k = 1:$

$$y(1) = 0,368 \cdot \overset{0}{y(0)} + 0,632 \cdot u(0) = 0,632$$

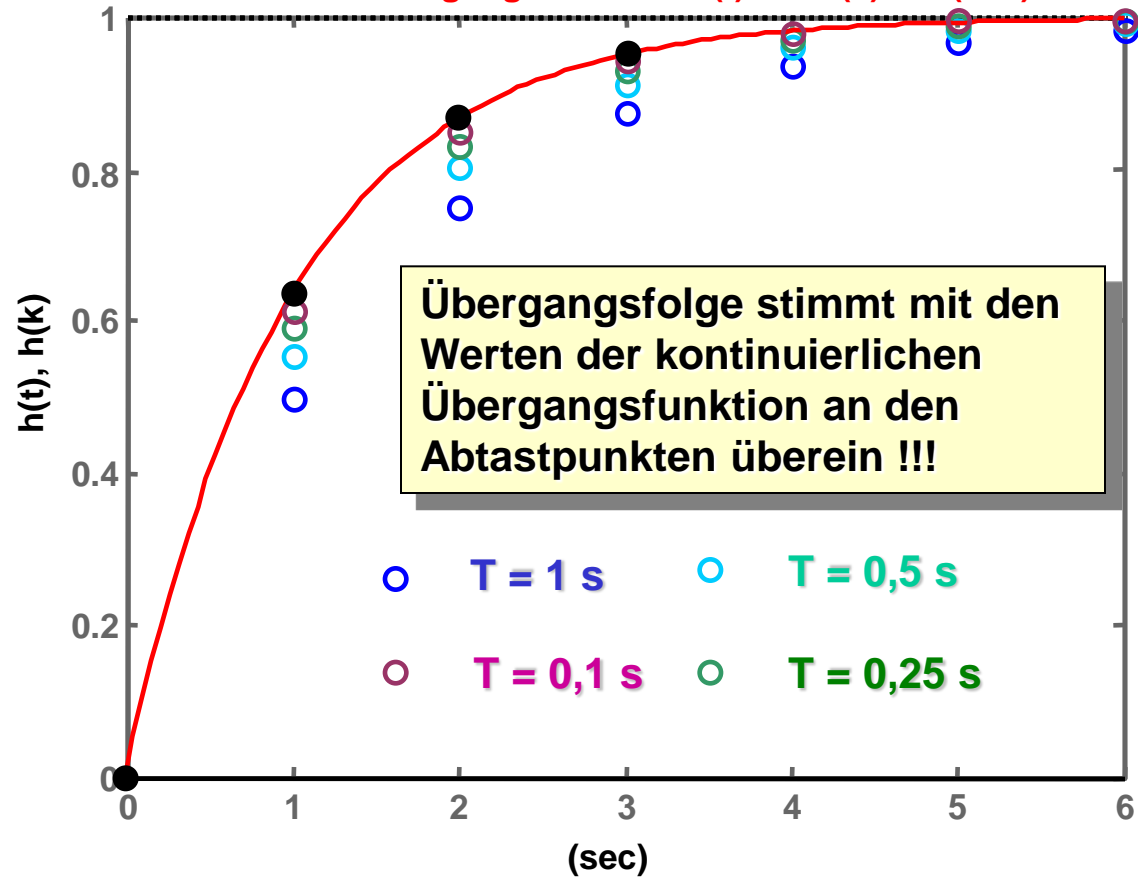
$k = 2:$

$$\begin{aligned} y(2) &= 0,368 \cdot y(1) + 0,632 \cdot u(1) \\ &= 0,368 \cdot 0,632 + 0,632 = 0,865 \end{aligned}$$

$k = 3:$

$$\begin{aligned} y(3) &= 0,368 \cdot y(2) + 0,632 \cdot u(2) \\ &= 0,368 \cdot 0,865 + 0,632 = 0,950 \end{aligned}$$

Übergangsfunktion $h(t)$ für $G(s) = 1/(1+s)$



$$y(k) = 0,368 \cdot y(k-1) + 0,632 \cdot u(k-1)$$

Gesucht die Antwort auf $u(k) = k \cdot 1(k)$, ($y(k) = 0$ für $k < 0$)

$k = 0$:

$$y(0) = 0,368 \cdot \overset{0}{\cancel{y(-1)}} + 0,632 \cdot \overset{0}{\cancel{u(-1)}} = 0$$

$k = 1$:

$$y(1) = 0,368 \cdot \overset{0}{\cancel{y(0)}} + 0,632 \cdot \overset{0}{\cancel{u(0)}} = 0$$

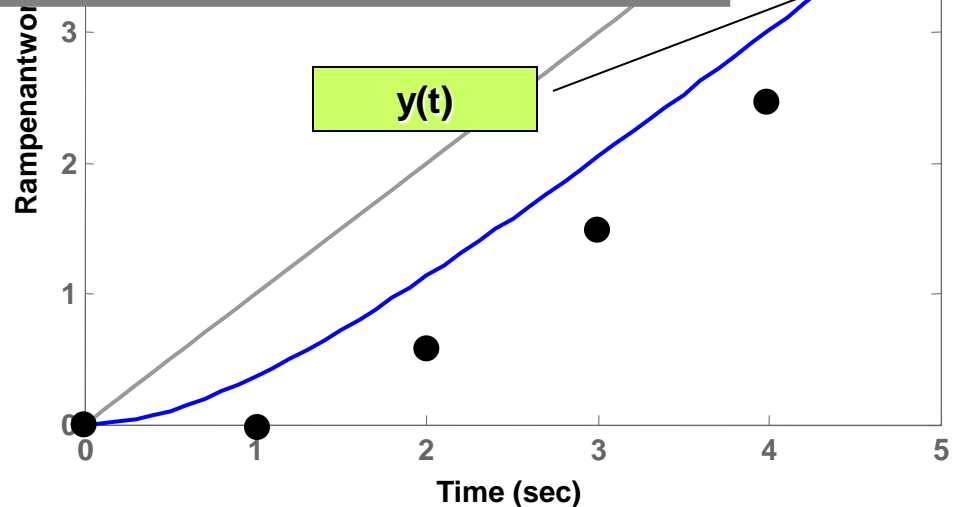
$k = 2$:

$$y(2) = 0,368 \cdot \overset{0}{\cancel{y(1)}} + 0,632 \cdot u(1) = 0,632$$

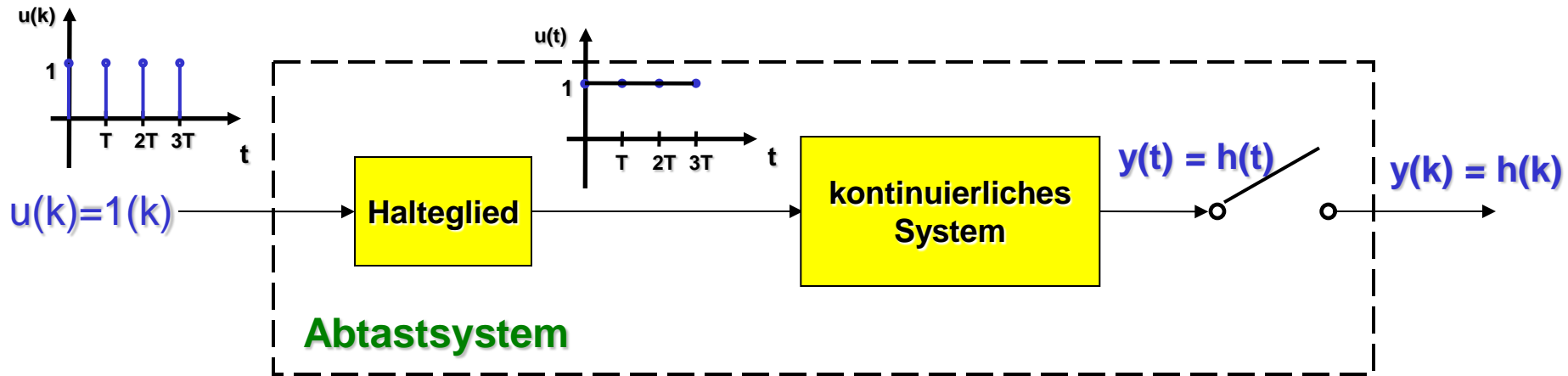
$k = 3$:

$$y(3) = 0,368 \cdot y(2) + 0,632 \cdot u(2) \\ = 0,368 \cdot 0,632 + 0,632 \cdot 2 = 1,497$$

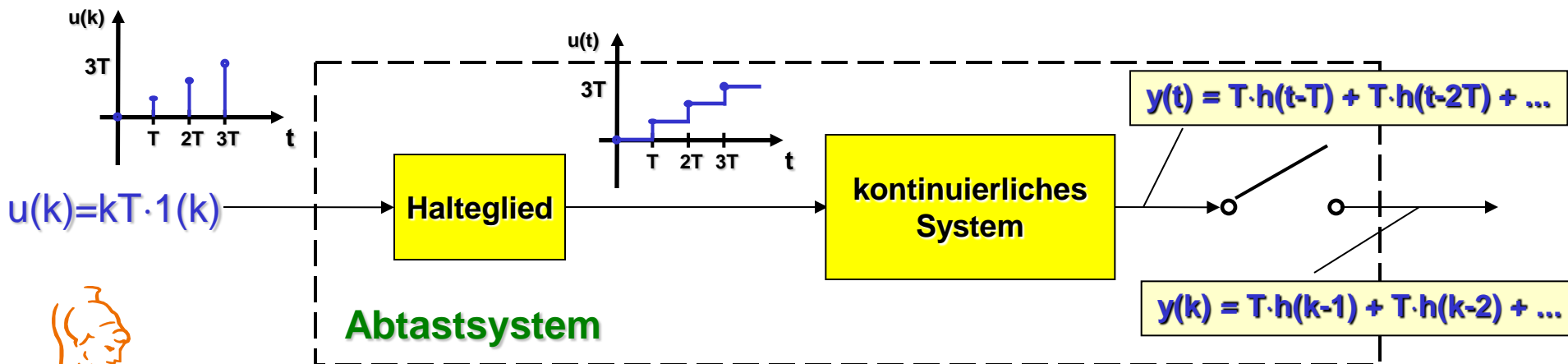
Ausgangsfolge stimmt mit den Werten der kontinuierlichen Rampenantwort an den Abtastpunkten **nicht** überein !!!



Sprungantwort



Rampenantwort

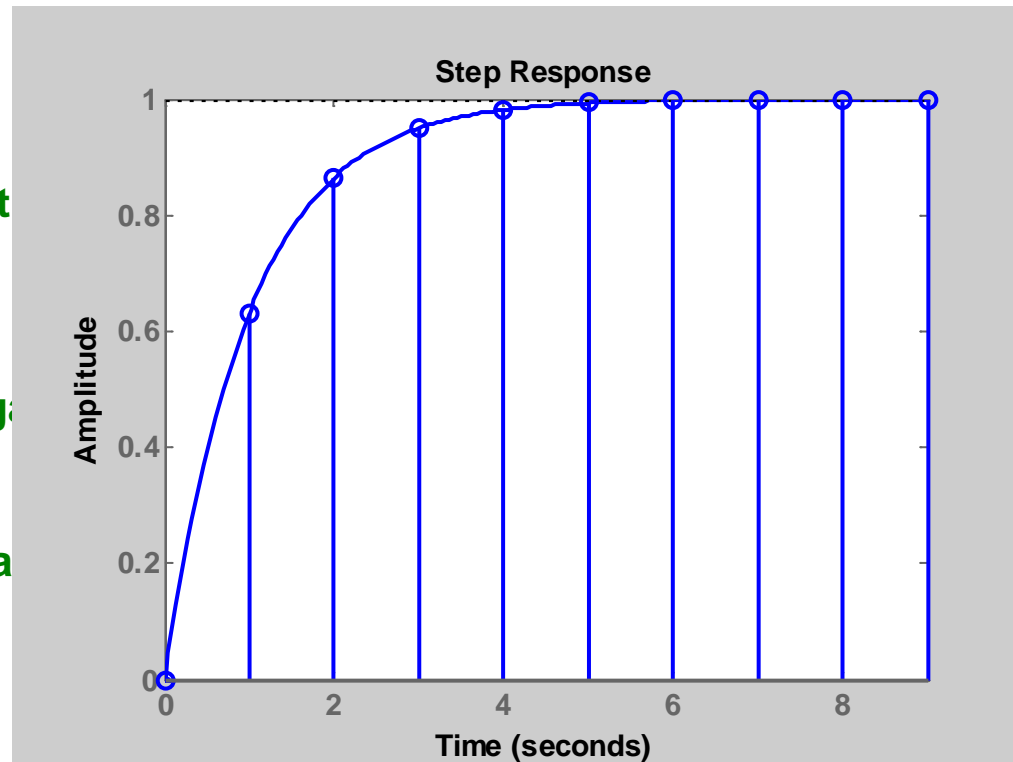


```

%
% z-Uebertragungsfunktion der kontinuierlichen Übertragungsfunktion
%
%           1
%   G(s) = -----
%           s + 1
s = tf('s')
%
G_s = 1/(s+1)
%
T = 1 % Abtastintervall
%
G_z = c2d(G_s,T) % Conversion of cont
%
figure(1)
%
step(G_s) % kontinuierliche Sprung
hold on

[y,t] = step(G_z,10) % diskrete Sprunga
stem(t,y)

```



```
t = 0:0.1:10;
```

```
u = t;
```

```
% kontinuierliche Rampenantwort
```

```
lsim(G_s,u,t)
```

```
%
```

```
hold on
```

```
t = 0:1:10;
```

```
u = t;
```

```
% diskrete Rampenantwort
```

```
[y1,t] = lsim(G_z,u,t)
```

```
stem(t,y1,'r','LineStyle','none')
```

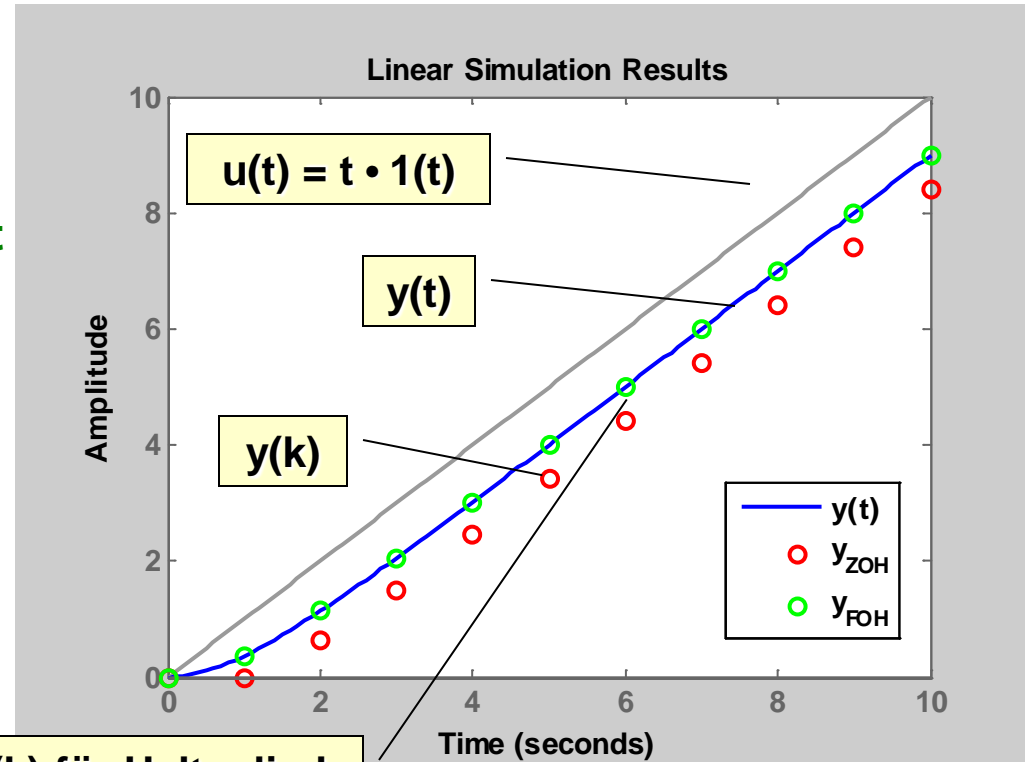
$y(k)$ für Halteglied
1. Ordnung

```
% diskrete Rampenantwort mit Halteglied 1. Ordnung
```

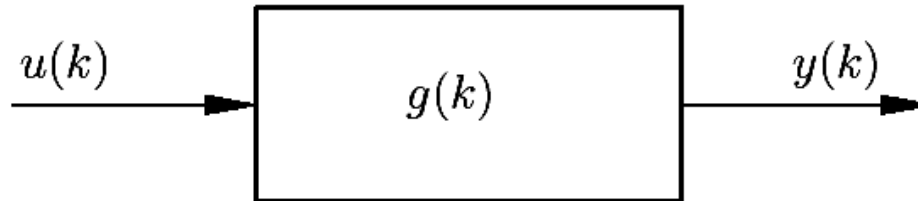
```
[y2,t] = lsim(c2d(G_s,T,'foh'),u,t)
```

```
stem(t,y2,'g','LineStyle','none')
```

```
legend('y(t)','y_{ZOH}','y_{FOH}')
```



Betrachtet werden lineare, zeitdiskrete Systeme:



Definition 4.1

- Ein autonomes zeitdiskretes System ist asymptotisch stabil, wenn es nach Auslenkung aus der Ruhelage selbsttätig dorthin zurückkehrt.
- Ein zeitdiskretes dynamisches System ist Ein-/Ausgangs-stabil (BIBO-stabil), wenn für beschränkte Eingangssignale $u(k)$ für alle t_k das Ausgangssignal $y(k)$ beschränkt ist:

$$|u(k)| \leq N < \infty \Rightarrow |y(k)| \leq M < \infty, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$



Auch bei zeitdiskreten Übertragungssystemen muß **nicht** zwischen **asymptotischer** und **BIBO**-Stabilität unterscheiden werden !

Aus Berechnung der Ausgangsfolge mit Hilfe der Faltungssumme

$$|y(k)| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |g(k-\nu)| |u(\nu)| < \infty$$

folgt:

Satz 4.1

Ein lineares zeitinvariantes zeitdiskretes System mit der Gewichtsfolge $g(k)$ ist dann und nur dann stabil, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |g(k)| = 0 \quad (4.3)$$

gilt.



Stabilitätsbedingung im z-Bereich

Satz 4.2

Ein lineares zeitinvariantes zeitdiskretes System mit der Übertragungsfunktion $G(z)$ ist dann und nur dann stabil, wenn alle Pole von $G(z)$ innerhalb des Einheitskreises der z -Ebene liegen, d.h. wenn gilt

$$|z_i| < 1 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad .$$

Folgt unmittelbar aus der Abbildung $z = e^{sT}$

Ein **stabiles**, kontinuierliches System kann durch Abtastung **nicht** instabil werden.

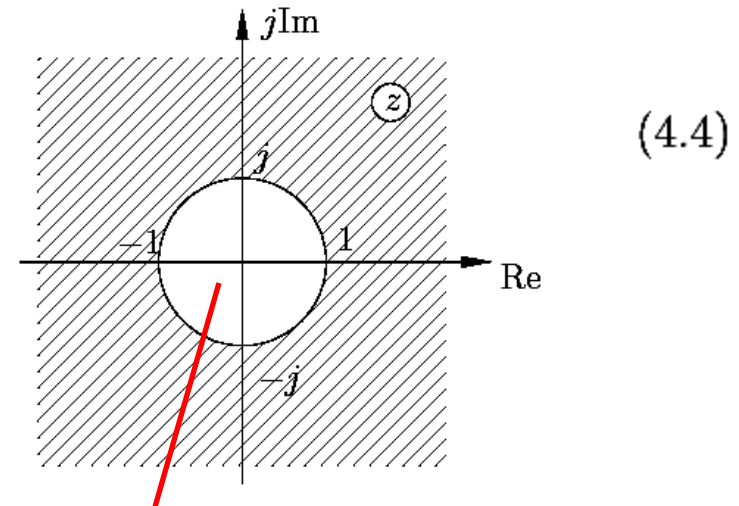


Bild 4.2: Stabilitätsgebiet in der z -Ebene

Eine **aufklingende** Schwingung eines kontinuierlichen Systems kann allerdings so abgetastet werden, daß die Schwingung in der Abtastfolge **nicht sichtbar** ist !!!



Pole kontinuierlicher und zeitdiskreter Systeme

Aus

$$z = e^{sT} \quad \text{mit} \quad s = \sigma + j\omega$$

$$\begin{aligned} |e^{j\omega T}| &= |\cos \omega T + j \sin \omega T| \\ &= \sqrt{\cos^2(\omega T) + \sin^2(\omega T)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

folgt

$$|z| = |e^{(\sigma + j\omega)T}| = |e^{\sigma T}| \cdot |e^{j\omega T}| = e^{\sigma T}$$

und

$$\arg z = \varphi = \omega T$$

- Für ein konstantes Abtastintervall T hängt der Betrag von z nur vom Realteil σ ab.
- Das Argument von z wird nur von ω bestimmt.

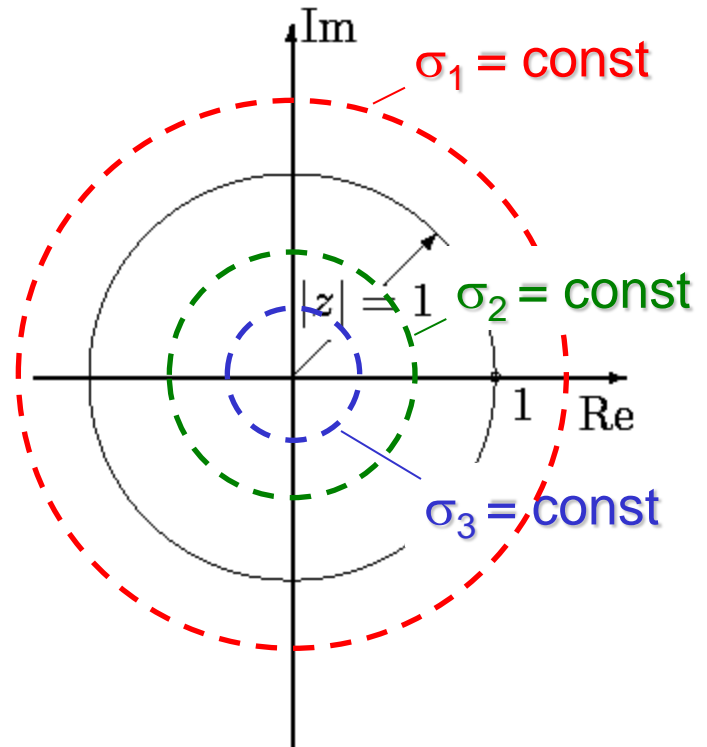
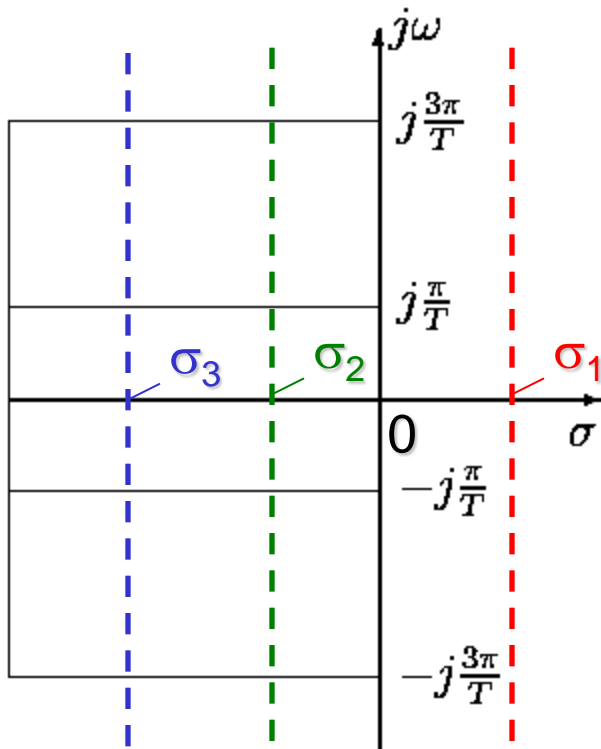


Linien mit $\sigma = \text{const}$ (absolute Stabilitätsreserve)

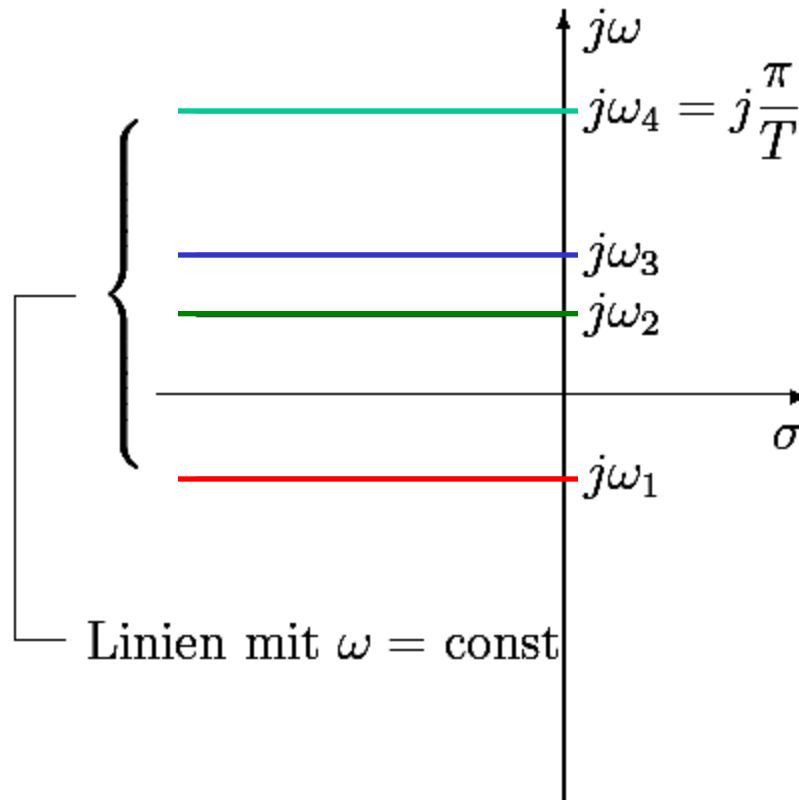
Kreise mit dem Radius $e^{\sigma T}$

s-Ebene

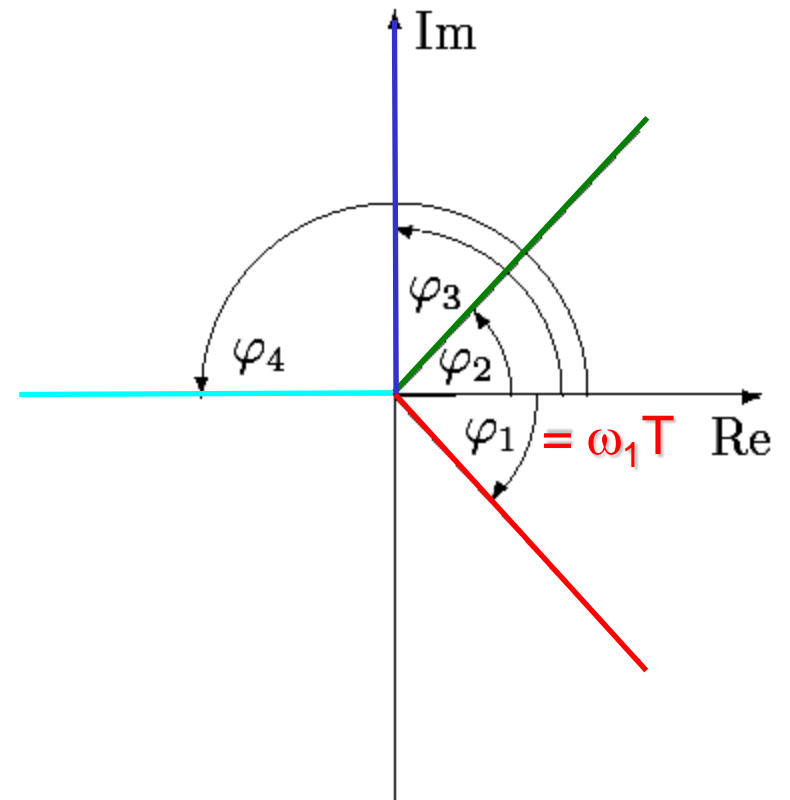
z-Ebene



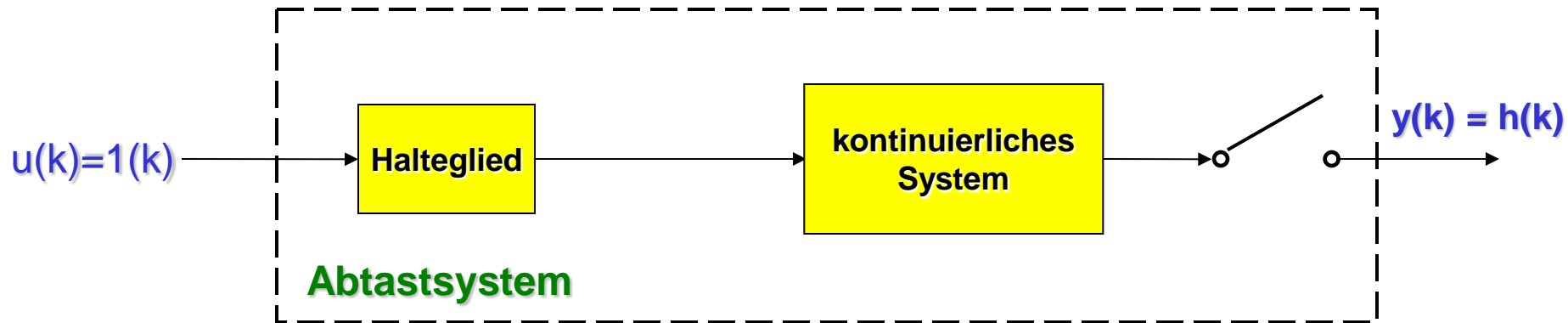
Linien mit $\omega = \text{const}$



Geraden mit Winkel ωT



Betrachtet werden lineare Abtastsysteme



Frage:

Gibt es auch einen eindeutigen Zusammenhang zwischen den Nullstellen von $G(s)$ und den Nullstellen von $G(z)$?



Beispiel:

Das kontinuierliche System bestehe aus einer Reihenschaltung von zwei Integratoren mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^2} .$$

Eine Berechnung der äquivalenten z-Übertragungsfunktion ist mit Hilfe der folgenden Gleichung möglich:

$$G(z) = \frac{z - 1}{z} \mathcal{Z}\{h(k)\} .$$

Zunächst ist die Berechnung von $h(t)$ erforderlich:

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} \text{ für } U(s) = \frac{1}{s} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} . \end{aligned}$$



Mit Hilfe der Korrespondenz 2 der Tabelle A2 im Skript SRT erhält man:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{1}{2}t^2$$

Anwendung der z-Transformation auf die abgetastete Übergangsfunktion $h(t)$ liefert dann mittels der Korrespondenz 4 in Tabelle 3.3:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}t^2 \Big|_{t=kT}\right\} = \frac{T^2 z \cdot (z + 1)}{2(z - 1)^3}.$$

Damit ergibt sich die gesuchte äquivalente z-Übertragungsfunktion des Doppelintegrators zu:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z - 1}{z} \cdot \frac{T^2 \cancel{z} \cdot (z + 1)}{2(z - 1)^3} \\ &= \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z + 1}{(z - 1)^2}. \end{aligned}$$

Nullstelle bei $z = -1$



Allgemein gilt sogar der folgende Zusammenhang (Aström u.a. 1984):

Die äquivalente z-Übertragungsfunktion der Übertragungsfunktion $G(s) = s^{-n}$ ist

$$G(z) = \frac{T^n B_n(z)}{n! (z-1)^n}$$

mit

Immer $n-1$ Nullstellen

$$B_n(z) = b_1^n z^{n-1} + b_2^n z^{n-2} + \dots + b_n^n$$

und

$$b_k^n = \sum_{l=1}^k (-1)^{k-l} l^n \binom{n+1}{k-l}, \quad k = 1, \dots, n.$$



$$B_n(z) = b_1^n z^{n-1} + b_2^n z^{n-2} + \dots + b_n^n$$

Für $n = 1, \dots, 6$ ergeben sich folgende Polynome:

$$B_1(z) = 1$$

$$B_2(z) = z + 1$$

$$B_3(z) = z^2 + 4z + 1$$

$$B_4(z) = z^3 + 11z^2 + 11z + 1$$

$$B_5(z) = z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1$$

$$B_6(z) = z^5 + 57z^4 + 302z^3 + 302z^2 + 57z + 1$$

n	nicht stabile Nullstellen von $B_n(z)$
2	-1
3	-3,732
4	-1; -9,899
5	-2,322, -23,20
6	-1; -4,542; -51,22

Die Polynome $B_n(z)$ sind sogenannte Euler-Frobenius-Polynome (**Weller u.a. 1997**), die auch durch die folgende Rekursionsformel berechnet werden können:

$$B_1(z) = 1$$

$$B_{k+1}(z) = (1 + kz)B_k(z) + z(1 - z)\frac{dB_k(z)}{dz}, \quad k = 1, 2, \dots$$



Euler-Frobenius-Polynome haben folgende Eigenschaften:

- Die Wurzeln der Polynome $B_n(z)$ sind reell, einfach und immer negativ.
- Wenn n_i^* eine Wurzel von $B_n(z)$ ist, dann ist $\frac{1}{n_i^*}$ ebenfalls eine Wurzel von $B_n(z)$.
- Außerdem gilt $B_n(1) = n!$.

Für beliebige rationale Übertragungsfunktionen $G(s)$ existiert kein einfacher Zusammenhang zwischen den Nullstellen des kontinuierlichen und des äquivalenten zeitdiskreten Systems.

Unabhängig von der Anzahl der Nullstellen von $G(s)$ hat die z-Übertragungsfunktion in der Regel $n-1$ Nullstellen.

Allgemeingültige Aussagen können nur für die Grenzfälle $T \rightarrow 0$ und $T \rightarrow \infty$ angegeben werden.



Satz:

Sei $G(s)$ eine rationale Übertragungsfunktion

$$G(s) = k \frac{(s - n_1)(s - n_2) \cdots (s - n_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

in Pol-Nullstellenform mit $m < n$ und $G(z)$ die zugehörige z -Übertragungsfunktion des Abtastsystems.

Wenn die Abtastzeit T gegen Null geht, streben m Nullstellen von $G(z)$ gegen 1, so wie es $e^{n_i T}$ dann tut, und $n - m - 1$ Nullstellen von $G(z)$ gegen die Nullstellen des Euler-Frobenius-Polynoms $B_{n-m}(z)$.

Diskretisierungsnullstellen

die eigentlichen Nullstellen



Aus diesem Zusammenhang und den Eigenschaften eines Euler-Frobenius-Polynoms folgen diese Aussagen:

- **Die Grenzwerte einiger Nullstellen von $G(z)$ sind vom Polüberschuß (Differenzgrad) der Übertragungsfunktion $G(s)$ des kontinuierlichen Systems abhängig.**
- **Die äquivalente z -Übertragungsfunktion eines kontinuierlichen Systems mit einem Differenzgrad $n-m > 2$ wird für entsprechend kleine Abtastzeiten T immer Nullstellen außerhalb des Einheitskreises haben.**
- **Dies kann schon bei technisch relevanten Abtastzeiten auftreten, so daß nichtminimalphasige äquivalente zeitdiskrete Systeme häufig vorkommen.**



Beispiel:

Betrachtet wird eine Reihenschaltung von 3 PT₁-Systemen mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^3}.$$

Die zugehörige z-Übertragungsfunktion ergibt sich zu

$$G(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{(z - e^{-T})^3}$$

Nullstelle mit $|z| > 1$
für $T < 1,8399$

mit

$$b_1 = 1 - (1 + T + T^2/2)e^{-T}$$

$$b_2 = (-2 + T + T^2/2)e^{-T} + (2 + T - T^2/2)e^{-2T}$$

$$b_3 = (1 - T + T^2/2)e^{-2T} - e^{-3T}.$$

Nullstellen bei
 $z_1 = -0,2659$, $z_2 = -3,704$
für $T = 0,01$



Für den technisch weniger relevanten Fall von sehr großen Abtastzeiten gilt dieser Zusammenhang:

Satz:

Sei $G(s)$ eine rationale Übertragungsfunktion mit $m < n$ und $G(0) \neq 0$ sowie $\operatorname{Re} p_i < 0$. Dann wandern alle Nullstellen der z -Übertragungsfunktion gegen Null, wenn die Abtastzeit T unendlich groß wird.



Nichtminimalphasige kontinuierliche Systeme können durch Abtastung zu minimalphasigen Abtastsystemen werden.



Beispiel:

Die kontinuierliche Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{6(1-s)}{(s+2)(s+3)}$$

ist stabil und hat eine Nullstelle in der rechten s -Halbebene bei $s=1$.

Die Nullstelle der z -Übertragungsfunktion des Abtastsystems ergibt sich zu

$$z_1 = -\frac{8e^{-2T} - 9e^{-3T} + e^{-5T}}{1 - 9e^{-2T} + 8e^{-3T}}$$

Nullstelle mit $|z| = 1$
für $T = 1,2485$

Nullstelle mit $|z| < 1$
für $T > 1,2485$

