

Übung 6 - Lösung

Aufgabe 1. Inverses Pendel

Es wird ein Pendel von Masse m und Länge l betrachtet, das wie in Abb. 1 dargestellt, auf einen Wagen montiert ist. Die Beschleunigung u des Wagens stellt die Stellgröße dar. Die Masse des Stabs wird vernachlässigt.

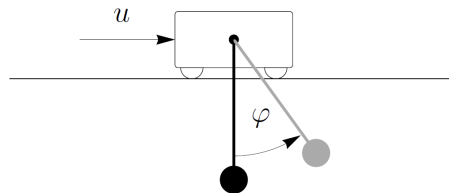


Abbildung 1: Pendel-Wagen-System

Aufgaben

- a) Verifizieren Sie, dass die Dynamik des Systems durch die folgende Differentialgleichung gegeben ist (g ist die Erdbeschleunigung und γ ist der Reibungskoeffizient für die Reibung am Aufhängepunkt des Pendels):

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin(\varphi) - \frac{\omega^2}{g} \cos(\varphi) \cdot u - \gamma \dot{\varphi}. \quad (1)$$

Bestimmen Sie die Konstante ω in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment J am Aufhängepunkt sowie den Größen g , m und l .

- b) Linearisieren Sie (1) um die Ruhelage $(\varphi, \dot{\varphi}) = (\pi, 0)$ und $u = 0$, und bestimme die Übertragungsfunktion $G(s)$ des linearisierten Systems.
- c) Bestimmen Sie die z -Übertragungsfunktion $G(z)$ des diskretisierten (und linearisierten) Systems, welches mit Periode $T > 0$ abgetastet wird. Man berechne nur den Fall $\gamma = 0$.

Aufgaben

- d) Überführen Sie das linearisierte Pendel-Wagen-System in ein (kontinuierliches) Zustandsraummodell der Form $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$, $y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)$ (wenn φ die einzige Ausgangsgröße ist).
- e) Bestimmen Sie das äquivalente zeitdiskrete Zustandsraummodell

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_d u(k), \quad y(k) = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}(k) \quad (2)$$

für den Fall $\gamma = 0$ und die Abtastzeit $T > 0$.

Lösung Aufgabe 1. a) Durch Betrachtung der anliegenden Momente am Aufhängepunkt erhalten wir

$$-J\ddot{\varphi} = l \cdot (\tilde{F}_G + \tilde{F}_u) + M_R,$$

wobei $\tilde{F}_G = m \cdot g \cdot l \sin(\varphi)$ und $\tilde{F}_u = m \cdot u \cdot l \cos(\varphi)$ (die Masse des Pendelarmes sei vernachlässigt). M_R ist das Reibungsmoment am Aufhängepunkt (M_R ist proportional zu $\dot{\varphi}$). Daher folgt (1) mit

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}.$$

- b) Wir können (1) auch als System 1. Ordnung schreiben. Mit den neuen Variablen $x_1 = \varphi$ und $x_2 = \dot{\varphi}$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega^2 \sin x_1 - \frac{\omega^2}{g} \cdot u \cdot \cos x_1 - \gamma x_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Wir bezeichnen die rechte Seite von (3) mit F , d.h. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Das um $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$ (und $u = 0$) linearisierte Modell $\dot{x} = A(x - (\pi, 0)) + Bu$ erhalten wir wie folgt ($x = (x_1, x_2)^T$):

$$A = \left. \frac{\partial F(\cdot, 0)}{\partial x} \right|_{x=(\pi, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\gamma \end{pmatrix},$$

und

$$B = \left. \frac{\partial F((\pi, 0), \cdot)}{\partial u} \right|_{u=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega^2}{g} \end{pmatrix}.$$

Das linearisierte System ist demnach gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - \pi \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2/g \end{pmatrix} u.$$

Wir definieren $\tilde{\varphi} = \varphi - \pi$. Dann gilt

$$\ddot{\tilde{\varphi}} = \omega^2 \tilde{\varphi} + \frac{\omega^2}{g} u - \gamma \dot{\tilde{\varphi}}.$$

Mittels Laplace-Transformation erhalten wir

$$s^2 \Phi(s) = \omega^2 \Phi(s) - \gamma s \Phi(s) + (\omega^2/g) U(s)$$

und damit die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\omega^2}{s^2 - \omega^2 + s\gamma}.$$

c) Es sei $\gamma = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{g} \cdot \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}(\frac{\omega^2}{s(s^2 - \omega^2)})|_{t=kT}) = \\ &= \frac{1}{g} \cdot \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2 - \omega^2} - \frac{1}{s})|_{t=kT}) = \\ &= \frac{1}{g} \cdot \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}(\frac{1/2}{s-\omega} + \frac{1/2}{s+\omega} - \frac{1}{s})|_{t=kT}) \\ &= \frac{1}{g} \cdot \frac{z-1}{z} \left(\frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{\omega T}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{-\omega T}} - \frac{z}{z-1} \right) = \\ &= \frac{1}{g} \left(\frac{1}{2} \frac{z-1}{z - e^{\omega T}} + \frac{1}{2} \frac{z-1}{z - e^{-\omega T}} - 1 \right). \end{aligned}$$

d) Siehe (ii) und $c = (1, 0)^T$.

e) Nach Vorlesung gilt

$$\mathbf{A}_d = e^{AT}, \quad \mathbf{B}_d = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau, \quad \mathbf{c}_d = c = (1, 0).$$

Wir müssen also für

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \tau \tag{4}$$

die Matrix-Exponentialfunktion bestimmen. Die Eigenwerte von A sind ω and $-\omega$ und die zugehörigen Eigenvektoren $(1, \omega)^T$ bzw. $(-1, \omega)^T$. Wir diagonalisieren (4) vermöge

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega & \omega \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann

$$P^{-1}AP = \underbrace{\frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$e^{A\tau} = P \begin{pmatrix} e^{\omega\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\omega\tau} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\omega\tau} + e^{-\omega\tau}}{2} & \frac{e^{\omega\tau} - e^{-\omega\tau}}{2\omega} \\ \frac{\omega e^{\omega\tau} - \omega e^{-\omega\tau}}{2} & \frac{e^{\omega\tau} + e^{-\omega\tau}}{2} \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{A\tau} B d\tau &= \int_0^T \begin{pmatrix} \frac{e^{\omega\tau} + e^{-\omega\tau}}{2} & \frac{e^{\omega\tau} - e^{-\omega\tau}}{2\omega} \\ \frac{\omega e^{\omega\tau} - \omega e^{-\omega\tau}}{2} & \frac{e^{\omega\tau} + e^{-\omega\tau}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2/g \end{pmatrix} d\tau = \frac{1}{g} \int_0^T \begin{pmatrix} \frac{\omega}{2}(e^{\omega\tau} - e^{-\omega\tau}) \\ \frac{\omega^2}{2}(e^{\omega\tau} + e^{-\omega\tau}) \end{pmatrix} d\tau = \\ &= \frac{1}{g} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{\omega T} + e^{-\omega T} - 2) \\ \frac{\omega}{2}(e^{\omega T} - e^{-\omega T}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. w -Transformation

Beweisen Sie im Detail folgende Eigenschaft der in der Vorlesung eingeführten w -Transformation. Sei $C(X) = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \dots + \alpha_0$ ein reelles Polynom vom Grad $n > 0$ (d.h. $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \neq 0$) und sei $\tilde{C}(X)$ ein Polynom definiert durch

$$\tilde{C}(X) := (1 - X)^n C\left(\frac{1 + X}{1 - X}\right).$$

Dann gilt: Ist \tilde{C} ein Hurwitz-Polynom vom Grad n , so liegen alle Nullstellen von C im Inneren des Einheitskreises. Zeigen Sie also

$$((\tilde{C}(w) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} w < 0) \text{ und } \deg \tilde{C} = n) \Rightarrow (C(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1).$$

Lösung Aufgabe 2. Sei $C(z) = 0$ für ein $z \in \mathbb{C}$. Wir müssen beweisen, dass $|z| < 1$. Wir nehmen zunächst $z \neq -1$ an und definieren

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Dann gilt $\tilde{C}(w) = (1 - w)^n C(z) = 0$, also gilt $\operatorname{Re} w < 0$, denn \tilde{C} ist als Hurwitz vorausgesetzt. Da nun

$$z = \frac{1 + w}{1 - w}$$

gilt

$$\begin{aligned} |z|^2 &= z \cdot \bar{z} = \frac{1 + w}{1 - w} \cdot \frac{1 + \bar{w}}{1 - \bar{w}} = \frac{1 + 2 \operatorname{Re} w + |w|^2}{1 - 2 \operatorname{Re} w + |w|^2} \\ &< \frac{1 + 2 \operatorname{Re} w + |w|^2}{1 + |w|^2} < \frac{1 + |w|^2}{1 + |w|^2} = 1, \end{aligned}$$

das war zu zeigen. Ist nun $z = -1$, d.h. $C(-1) = 0$, so schreiben wir $C(X) = (1 + X)^k C_1(X)$ mit einem reellen Polynom C_1 , welches $C_1(-1) \neq 0$ erfüllt. Daher ist

$$\tilde{C}(X) = (1 - X)^n \cdot \left(1 + \frac{1 + X}{1 - X}\right)^k C_1\left(\frac{1 + X}{1 - X}\right) = (1 - X)^{n-k} \cdot 2^k \cdot C_1\left(\frac{1 + X}{1 - X}\right),$$

also ist $n - k$ der Grad von \tilde{C} , also kleiner als n , Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. $C(-1) \neq 0$.