Victor Cheidde Chaim M.Sc.
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung FT 2022

Übung 5 - Lösung

Aufgabe 1. z-Übertragungsfunktion
Berechnen Sie eine z-Übertragungsfunktion, die ein PDT_1-System bei einer Abtastzeit von $T > 0$ beschreibt auf zwei verschiedene Arten:

a) durch Berechnung der äquivalenten z-Übertragungsfunktion,

b) durch Diskretisierung der Differenzialgleichung $T_1\dot{y}(t) + y(t) = K[u(t) + T_D\dot{u}(t)]$, wobei K, T_D und T_1 positive Konstanten sind.

Zur Erinnerung, die kontinuierliche Übertragungsfunktion eines PDT_1-Systems lautet

$$G_{PDT_1}(s) = K \cdot \frac{1 + sT_D}{1 + sT_1}.$$

Lösung Aufgabe 1. a)

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\Big(\mathcal{L}^{-1}\big(\frac{G(s)}{s}\big)\Big|_{t=kT}\Big) = \\
&= \frac{z-1}{z} \cdot K \cdot \mathcal{Z}\Big(\mathcal{L}^{-1}\big(\frac{1+sT_D}{s(1+sT_1)}\big)\Big|_{t=kT}\Big) \\
&= \frac{z-1}{z} \cdot K \cdot \mathcal{Z}\Big(\mathcal{L}^{-1}\big(T_D\frac{1/T_1}{s+1/T_1} + \frac{1/T_1}{s(s+1/T_1)}\big)\Big|_{t=kT}\Big) \\
&= \frac{z-1}{z} \cdot K\Big(\frac{T_D}{T_1} \cdot \frac{z}{z-e^{-T/T_1}} + \frac{(1-e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_1})}\Big) \\
&= K \cdot \Big(\frac{T_D}{T_1}\frac{z-1}{z-e^{-T/T_1}} + \frac{1-e^{-T/T_1}}{z-e^{-T/T_1}}\Big) \\
&= K \cdot \frac{T_D}{T_1} \cdot \frac{z - \big(1 + (T_1/T_D)e^{-T/T_1} - T_1/T_D\big)}{z-e^{-T/T_1}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&T_1 \cdot \frac{y(k)-y(k-1)}{T} + y(k) = K \cdot \Big(u(k) + T_D\frac{u(k)-u(k-1)}{T}\Big) \\
&\iff (1+T_1/T)Y(z) - (T_1/T)z^{-1}Y(z) = K \cdot \Big(U(z) + (T_D/T)(U(z) - z^{-1}U(z))\Big)
\end{aligned}$$

Also gilt

$$
\begin{aligned}
G(z) &= K \cdot \frac{(1+\frac{T_D}{T})z - \frac{T_D}{T}}{(1+\frac{T_1}{T})z - \frac{T_1}{T}} \\
&= K \cdot \frac{T+T_D}{T+T_1} \cdot \frac{z - \frac{T_D}{T+T_D}}{z - \frac{T_1}{T+T_1}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2. Diskreter Regelkreis

In Übung 4, Aufgabe 1 wurde eine kontinuierliche Strecke mit Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{K_s}{s(1+sT_s)}$ betrachtet. Die äquivalente z-Übertragungsfunktion $G(z)$ bei Abtastzeit $T > 0$ lautet

$$
G(z) = K_s \frac{(T - T_s + T_s z_p)z + T_s - z_p(T+T_s)}{(z-1)(z-z_p)}, \quad K_s > 0,\ T_s > 0
$$

mit $z_p = e^{-T/T_s}$.

Aufgaben

a) Schließen Sie den zeitdiskreten Regelkreis mit einem zeitdiskreten PDT_1-Regler, so dass die Pole des geschlossenen, zeitdiskreten Regelkreises bei

$$
q_\pm = e^{p_\pm T}, \quad p_\pm = -\pi/2 \pm j\pi/2 \tag{1}
$$

liegen. Verwenden Sie

$$
G_{PDT_1}(z) = K \cdot \frac{z-a}{z-b}
$$

als z-Übertragungsfunktion des Reglers mit den Konstanten K, a, b.

b) Berechne die Konstanten K, a, b aus (i) für die Daten $K_s = 1$, $T_s = 2$, $T = 0.2$ und $q_\pm$ wie in (1) angegeben.

Lösung Aufgabe 2. Wir fassen Konstanten zusammen und schreiben

$$
G(z) = \frac{k_2 z + k_1}{(z-1)(z-z_p)}.
$$

Die Pole des geschlossenen, zeitdiskreten Regelkreises sind die Nullstellen von

$$
1 + G_{PDT_1}(z)G(z) = 1 + K\frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{k_2 z + k_1}{(z-1)(z-z_p)}.
$$

Um die Zahl der Pole von drei auf zwei zu reduzieren setzen wir zunächst $a = z_p$. Um Pole bei $q_\pm$ zu konstruieren müssen machen wir folgenden Ansatz:

$$
\begin{aligned}
&(z-1)(z-b) + Kk_2 z + Kk_1 = (z-q_+)(z+q_-) \\
\iff\ & z^2 - z(1+b-Kk_2) + b + Kk_1 = z^2 - z(q_+ + q_-) + q_+ q_-.
\end{aligned}
$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 + b - Kk_2 &= q_+ + q_- \\ b + Kk_1 &= q_+ q_- \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & -k_2 \\ 1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_+ + q_- - 1 \\ q_+ q_- \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{pmatrix} b \\ K \end{pmatrix} = \frac{1}{k_1 + k_2} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_+ + q_- - 1 \\ q_+ q_- \end{pmatrix}.$$

Mit den angegebenen Daten erhält man $a \approx 0.90$, $b \approx 0.46$ und $K \approx 7.57$.