

## Übung 3 - Lösung

Thema: z-Transformation

### Aufgabe 1. z-Transformation von Folgen

Gegeben sind die Folgen  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$

- $f_k = (-a)^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $|z| > |a| \geq 1$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .
- $f_k = \begin{cases} 1, & k = 0, 2, 4, \dots \\ 0, & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$
- $f_k = \frac{1}{2}(kT)^2$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $T > 0$ .
- $f_k = \frac{T^2}{2}k(k-1)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T > 0$ .
- $f_k = \sin(k\omega T)$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\omega > 0$ ,  $T > 0$ .

Bestimmen Sie die z-Transformation

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k},$$

für alle gegebenen Folgen. Es gilt  $|z| > 1$ , sowie

$$\sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^{-k} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}. \quad (2)$$

für  $|z| > 1$

### Lösung Aufgabe 1. $\Delta$

(i)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-a)^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-a^{-1}z)^{-k} \stackrel{|a^{-1}z| > 1}{=} \frac{1}{1 - (-az^{-1})} = \frac{z}{z+a}$$

(ii) Wir bemerken  $f_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k$ . Damit

$$F(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-k} \stackrel{(1)}{=} \frac{z}{2z-2} + \frac{z}{2z+2} = \frac{z^2}{z^2-1}.$$

(iii)

$$F(z) = \frac{T^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^{-k} \stackrel{(2)}{=} \frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

(iv)

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{T^2}{2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} \right) = \frac{T^2}{2} \left( \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{z}{(z-1)^2} \right) \\ &= \frac{T^2 z}{(z-1)^3} \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\omega T) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{jk\omega T} - e^{-jk\omega T}}{2j} \cdot z^{-k} = \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} e^{jk\omega T} z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-jk\omega T} z^{-k} \right) = \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2j} \cdot \left( \frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{z(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})}{z^2 + 1 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})} \\ &= \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \end{aligned}$$

## Aufgabe 2. Residuenmethode

Die  $z$ -Transformation einer Folge  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  ist durch

a)

$$F(z) = \frac{z - a}{(z - b)(z - c)}$$

mit  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $b \neq c$ ;

b)

$$F(z) = \frac{z}{(z - 1)^2}.$$

gegeben. Bestimmen Sie jeweils die Folge  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  mittels der Residuenmethode (siehe Skript).

**Lösung Aufgabe 2.** (i) Wir bemerken zunächst, dass  $b$  und  $c$  nach Voraussetzung einfache Pole von  $F(z)$  sind. Daher gilt

$$f_k = \text{Res}(F(z)z^{k-1}, b) + \text{Res}(F(z)z^{k-1}, c)$$

mit

$$\text{Res}(F(z)z^{k-1}, b) = \lim_{z \rightarrow b} \frac{z - a}{z - c} z^{k-1} = \frac{b - a}{b - c} b^{k-1}$$

sowie

$$\text{Res}(F(z)z^{k-1}, c) = \lim_{z \rightarrow c} \frac{z - a}{z - b} z^{k-1} = \frac{c - a}{c - b} c^{k-1}.$$

Also

$$f_k = \frac{b - a}{b - c} \cdot b^{k-1} - \frac{c - a}{b - c} \cdot c^{k-1}.$$

(ii) 1 ist ein zweifacher Pol, d.h.

$$\text{Res}(F(z)z^{k-1}, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} z^k = \lim_{z \rightarrow 1} k z^{k-1} = k.$$

Es folgt  $f_k = k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .

## Aufgabe 3. Differenzgleichungen

Für  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon \in \{0, 1\}$  und die Folge  $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$  ist durch

$$y_k = \alpha y_{k-1} + \beta u_{k-\epsilon} \tag{3}$$

eine Differenzgleichung gegeben. Wird ein  $PT_1$ -System gegeben durch  $T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$  mit Periode  $T > 0$  abgetastet und  $\dot{y}(kT)$  durch den Rückwärtsdifferenzenquotienten  $\frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T} = \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$  approximiert, so entsteht laut Vorlesung eine Differenzgleichung der Form (3) mit Konstanten

$$\alpha = T_1 / (T + T_1), \quad \beta = T / (T + T_1), \quad \epsilon = 0. \tag{4}$$

## Aufgaben

- a) Verifizieren Sie, dass die durch (3) gegebene Folge  $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  durch

$$y_k = \alpha^k y_0 + \beta \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha^\nu u_{k-\epsilon-\nu} \quad (5)$$

und  $y_0 \in \mathbb{R}$  berechnet werden kann.

- b) Sei  $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$  gegeben durch  $u_\nu = 0$  für alle  $\nu < 0$  und  $u_\nu = 1$  für alle  $\nu \geq 0$  (Sprungfolge). Diskutieren Sie die Existenz des Grenzwertes  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k$  in Abhängigkeit von  $\alpha$ .

*Hinweis:* Es gilt  $\sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha^\nu = \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$  für  $\alpha \neq 1$ .

- c) Berechnen Sie für ein  $PT_1$ -System die Konstanten  $\alpha, \beta$  und  $\epsilon$  in (3), wenn für  $\dot{y}(kT)$  der Vorwärtsdifferenzenquotient  $\frac{y_{k+1}-y_k}{T}$  verwendet wird.
- d) Diskutieren Sie den Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k$  für die in (4) und in (c) gegebenen Diskretisierungen eines  $PT_1$ -Systems.

## Lösung Aufgabe 3.

- (a) Mit Induktion über  $k$ : Der Fall  $k = 1$  ist klar. Wir nehmen an, (5) gelte für ein  $k \in \mathbb{N}$  (Induktionsannahme). Wir müssen zeigen, dass (5) auch für  $k + 1$  gültig ist, d.h. (3) reproduziert:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \alpha^{k+1} y_0 + \beta \sum_{\nu=0}^k \alpha^\nu u_{k+1-\epsilon-\nu} = \\ &= \alpha \cdot \alpha^k y_0 + \beta \left( \sum_{\nu=1}^k \alpha^\nu u_{k+1-\epsilon-\nu} \right) + \beta u_{k+1-\epsilon} = \\ &= \alpha \left( \underbrace{\alpha^k y_0 + \beta \sum_{\nu=1}^k \alpha^{\nu-1} u_{k+1-\epsilon-\nu}}_{=y_k} \right) + \beta u_{k+1-\epsilon} = \\ &= \alpha y_k + \beta u_{k+1-\epsilon}. \end{aligned}$$

- (b) Es gilt für  $\alpha \neq 1$ :

$$y_k = y_0 \alpha^k + \beta \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha} = \frac{\beta}{1 - \alpha} + \alpha^k \frac{((1 - \alpha)y_0 - \beta)}{1 - \alpha}.$$

Der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k$  existiert für  $|\alpha| < 1$ ;  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \frac{\beta}{1 - \alpha}$ .

Der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k$  existiert für  $\alpha = 1$  und  $\beta = 0$ ;  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_0$ .

In allen anderen Fällen existiert der Grenzwert nicht (wie man sich leicht überlegen kann).

- (c)

$$\alpha = 1 - T/T_1, \quad \beta = T/T_1, \quad \epsilon = 1$$

(d) Für  $T \geq 2T_1$  existiert mit den Daten aus (iii) der Grenzwert nicht. Andernfalls lautet er in allen Fällen

$$\frac{\beta}{1 - \alpha} = 1.$$