

Digitale Regelung FT 2022

Übung 2 - Lösung

Thema: Fourier-Transformation

Aufgabe 1. Fourier-Rücktransformation

Man bestimme eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deren Fourier-Transformation gegeben ist durch

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_0}, & |\omega| \le \omega_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $\omega_0 > 0$.

Lösung Aufgabe 1. Die Rücktransformation ist gegeben durch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Es folgt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{1}{2\omega_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{4\pi\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi \cdot j\omega_0 t} \left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}.$$

Aufgabe 2. Komplexe Fourier-Reihen

Sei $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein einzelner Rechteckimpuls gegeben durch

$$r(t) = \begin{cases} 1/T_r, & |t| \le T_r/2\\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $T_r > 0$ und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Signal gegeben durch

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\delta t} \sin(\omega_g t), & t \ge 0\\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

mit Konstanten $\delta > 0$, $\omega_g > 0$.

Aufgaben

a) Man bestimme die komplexe Fourierreihe der Rechteckimpulsfolge

$$s(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t - kT_s)$$

mit Periode $T_s>T_r/2>0$ (siehe Abb. 1). Man stelle einen Zusammenhang zwischen s und der Fourier-Transformation von r her.

- b) Man bestimme die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}(g)$ von g und stelle einen Zusammenhang zur Laplace-Transformierten $\mathcal{L}(g)$ von g her.
- c) Man bestimme das Spektrum des mit der Abtastzeit T_s "real" abgetasteten Signals $g^{\#} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welches gegeben sei durch

$$g^{\#}(t) := g(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t - kT_s).$$

(siehe Abb. 2).

Hinweis: Man verwende bei der Berechnung die Ergebnisse aus (1) und (2).

d) Man skizziere das Amplitudenspektrum von g und $g^{\#}$.

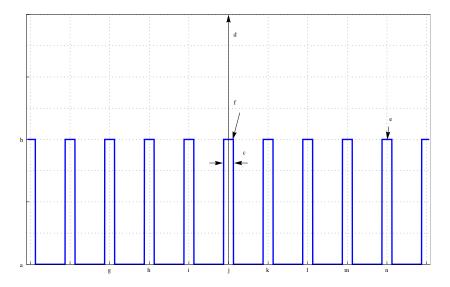


Abbildung 1: Rechteckimpulsfolge

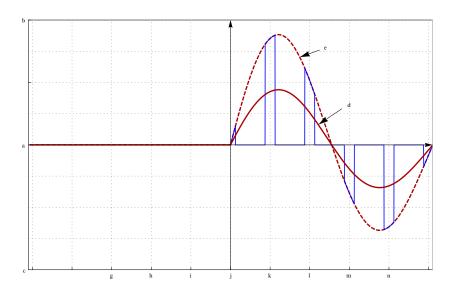


Abbildung 2: Abtastung

Lösung Aufgabe 2.

a)
$$c_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} r(t) \cdot e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \mathcal{F}(r)(k\omega_s).$$
 Also
$$s(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}(r)(k\omega_s) e^{jk\omega_s t}.$$

Mit $\omega_s=2\pi/T_s$ folgt für $k\in\mathbb{Z}$ ergeben sich die Koeffizienten der Fourrierreihe:

$$c_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} r(t) \cdot e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_r/2}^{T_r/2} \frac{1}{T_r} \cdot e^{-jk\omega_s t} dt$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{T_s} \frac{\sin(k\omega_s T_r/2)}{k\omega_s T_r} = \frac{\sin(k\pi T_r/T_s)}{k\pi T_r}.$$

b) Wir berechnen zuerst für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\beta) \neq 0$ das Integral

$$I := \int_0^\infty e^{-\beta t} \sin(\alpha t) \, dt$$

vermöge zweifacher partieller Integration (zunächst mit $u := \sin(\alpha t), \, v' := e^{-\beta t}$):

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\beta t} \sin(\alpha t) dt = \underbrace{\sin(\alpha t) \cdot \left(-\frac{1}{\beta} e^{-\beta t}\right)\Big|_{0}^{\infty}}_{=0} - \frac{\alpha}{-\beta} \int_{0}^{\infty} e^{-\beta t} \cos(\alpha t) dt$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \left(\underbrace{-\cos(\alpha t) \cdot \frac{1}{\beta} e^{-\beta t}\Big|_{0}^{\infty}}_{=1/\beta} - \frac{\alpha}{-\beta} \int_{0}^{\infty} e^{-\beta t} \underbrace{\left(-\sin(\alpha t)\right)}_{\frac{d}{dt} \cos(\alpha t) = -\alpha \sin(\alpha t)} dt\right)$$

$$= \frac{\alpha}{\beta^{2}} \left(1 - \alpha \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-\beta t} \sin(\alpha t) dt}_{=I}\right).$$

Es folgt $(1 + \alpha^2/\beta^2)I = \alpha/\beta^2$, d.h. da nach Voraussetzung $1 + \alpha^2/\beta^2 \neq 0$ gilt

$$I = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Damit folgt unmittelbar

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta t} \sin(\omega_g t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\delta + j\omega)t} \sin(\omega_g t) dt$$
$$= \frac{\omega_g}{(\delta + j\omega)^2 + \omega_g^2}.$$

Die Laplace-Transformierte von g ist

$$\mathcal{L}(g)(s) := \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{-\delta t} \sin(\omega_g t) dt.$$

Für $s = j\omega$ gilt daher $\mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{L}(g)(j\omega)$. Ferner gilt auch $\mathcal{L}(\sin(\omega_g t))(\delta + j\omega) = \mathcal{F}(g)(\omega)$.

c)

$$\mathcal{F}(g^{\#})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g^{\#}(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_s t} \cdot e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j(\omega - k\omega_s)t} dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \mathcal{F}(g)(\omega - k\omega_s) =$$

$$= \sum_{(ii)}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi T_r/T_s)}{k\pi T_r} \cdot \frac{\omega_g}{(\delta + j(\omega - k\omega_s))^2 + \omega_g^2}$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi T_r/T_s)}{k\pi T_r/T_s} \cdot \frac{\omega_g}{(\delta + j(\omega - k\omega_s))^2 + \omega_g^2}$$

Für ein beliebiges Signal $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt allgemeiner

$$\mathcal{F}(g^{\#})(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi T_r/T_s)}{k\pi T_r/T_s} \cdot \mathcal{F}(g)(\omega - k\omega_s).$$

d) Siehe Abb. 3 und Abb. 4.

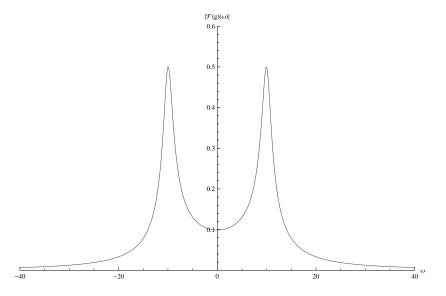


Abbildung 3: Amplitudenspektrum von $\mathcal{F}(g)$ für $\delta=1,\,\omega_g=10$

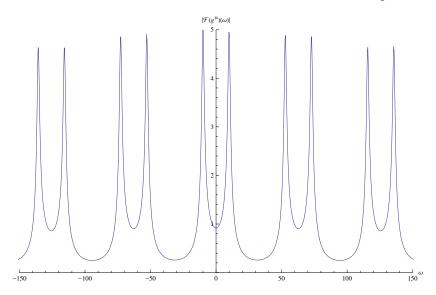


Abbildung 4: Amplitudenspektrum von $\mathcal{F}(g^{\#})$ für $\delta=1,\ \omega_g=10$ und $T_r=0.01,\ T_s=0.10$

Anhang

Satz 1 (Abtasttheorem von Shannon, vgl. Skript Satz 2.1, S.21).

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein stetiges und bandbegrenztes Signal, d.h. $\hat{f}(\omega) = 0$ falls $|\omega| > \omega_b$ für ein $\omega_b > 0$, wobei \hat{f} die Fourier-Transformierte von f bezeichnet. Ferner gelte außer $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ noch $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$. Dann folgt

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k \frac{2\pi}{\omega_s}) \cdot \frac{\sin((t - k \frac{2\pi}{\omega_s}) \frac{\omega_s}{2})}{(t - k \frac{2\pi}{\omega_s}) \frac{\omega_s}{2}}$$

falls $\omega_s \geq 2\omega_b$. In Worten: wird das Signal mit einer Abtastzeit von höchstens $2\pi/\omega_s$ abgetastet, so ist f eindeutig durch die Folge der Funktionswerte $\{f(k \cdot \frac{2\pi}{\omega_s}) : k \in \mathbb{Z}\}$ bestimmt.

Beweis. Man beachte, dass im Folgenden jede Vertauschung der Form $\int \sum = \sum \int$ mathematisch gesehen nicht trivial ist. Für die Zwecke der Vorlesung soll dies jedoch

außer Acht bleiben.

Es gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \hat{f}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \hat{f}_{per}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

mit

$$\hat{f}_{per}(\omega) := \begin{cases} \hat{f}(\omega), & \omega \in [-\omega_s/2, \omega_s/2] \\ \hat{f}(\omega - k\omega_s), & \omega \in [(2k-1)\omega_s/2, (2k+1)\omega_s/2], \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Da \hat{f}_{per} periodisch ist mit Periode ω_s (hier geht ein, dass $\omega_s \geq 2\omega_b$) können wir die komplexe Fourierreihe von \hat{f}_{per} aufschreiben:

$$\hat{f}_{per}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{\omega_s}\omega}.$$

Für $l \in \mathbb{Z}$ berechnen wir nun $f(l\frac{2\pi}{\omega_0})$.

$$f(l\frac{2\pi}{\omega_s}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{\omega_s}\omega} e^{j\omega l\frac{2\pi}{\omega_s}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} e^{j\omega(k+l)\frac{2\pi}{\omega_s}} d\omega.$$

Nun gilt

$$\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} e^{j\omega(k+l)\frac{2\pi}{\omega_s}} d\omega = \begin{cases} \omega_s, & l = -k \\ 0, & l \neq -k \end{cases},$$

denn für $k + l \neq 0$ gilt

$$\frac{e^{j\omega_s/2(k+l)\frac{2\pi}{\omega_s}} - e^{-j\omega_s/2(k+l)T_s}}{j(k+l)\frac{2\pi}{\omega_s}} = \frac{e^{j\pi(k+l)} - e^{-j\pi(k+l)}}{j(k+l)\frac{2\pi}{\omega_s}} = 0.$$

Es folgt

$$\frac{2\pi}{\omega_s} \cdot f(l\frac{2\pi}{\omega_s}) = c_{-l}$$

für alle $l \in \mathbb{Z}$. Dies eingesetzt ergibt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\omega_s} f(k\frac{2\pi}{\omega_s}) e^{-jk\frac{2\pi}{\omega_s}\omega} e^{j\omega t} d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_s}{2} \frac{2\pi}{\omega_s} f(k\frac{2\pi}{\omega_s}) \frac{e^{j(t-k\frac{2\pi}{\omega_s})(\omega_s/2)} - e^{-j(t-k\frac{2\pi}{\omega_s})(\omega_s/2)}}{j(t-k\frac{2\pi}{\omega_s})(\omega_s/2)}.$$

Also

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\frac{2\pi}{\omega_s}) \cdot \frac{\sin((t - k\frac{2\pi}{\omega_s})(\omega_s/2))}{(t - k\frac{2\pi}{\omega_s})(\omega_s/2)}.$$