Victor Cheidde Chaim M.Sc.
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung FT 2022

Übung 1 - Lösung

Thema: Fourier-Transformation

Aufgabe 1. T-periodische Funktionen
Eine T-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (f habe also die Eigenschaft $f(t) = f(t+T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, f sei stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar) kann in eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen, der *reellen Fourierreihe*, wie folgt zerlegt werden (für fast alle t):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t), \tag{1}$$

wobei $\omega = 2\pi/T$. Die Koeffizienten a_0, a_k und b_k sind durch

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

für $k = 1, 2, \ldots$ gegeben. Die Konstante $c \in \mathbb{R}$ kann beliebig gewählt werden. Für Anwendungen wählt man meist $c = 0$ oder $c = -T/2$. f kann auch in eine *komplexe Fourierreihe* zerlegt werden (für fast alle t):

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t}, \tag{5}$$

wobei $j = \sqrt{-1}$ und für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$c_k = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t) e^{-jk\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Aufgabe Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion. Man zeige folgende Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten der reellen und der komplexen Fourierreihe von f für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$a_0 = 2c_0, \tag{7}$$

$$a_k = c_k + c_{-k}, \tag{8}$$

$$b_k = j(c_k - c_{-k}). \tag{9}$$

Lösung Aufgabe 1.

$$\begin{aligned}
f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\cos(k\omega t) + j\sin(k\omega t)) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\cos(k\omega t) + j\sin(k\omega t)) + c_{-k}(\cos(-k\omega t) + j\sin(-k\omega t)) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\cos(k\omega t) + j\sin(k\omega t)) + c_{-k}(\cos(k\omega t) - j\sin(k\omega t)) \\
&= \underbrace{c_0}_{a_0/2} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(c_k + c_{-k})}_{a_k}\cos(k\omega t) + \underbrace{j(c_k - c_{-k})}_{b_k}\sin(k\omega t)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Eigenschaften T-periodischer Funktionen
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion. Man zeige für die Koeffizienten a_0, a_k, b_k in (1) folgende Eigenschaften:

1. Ist f *ungerade*, d.h. $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt $a_k = 0$ für alle $k = 0, 1, \ldots$
2. Ist f *gerade*, d.h. $f(-t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt $b_k = 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots$

Lösung Aufgabe 2. Wir zeigen 1., Aussage 2. folgt analog. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{T}{2} \cdot a_k &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \int_{-T/2}^{0} f(t)\cos(k\omega t)\,dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \\
&= -\int_{-T/2}^{0} f(-t)\cos(k\omega t)\,dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \\
&= -\int_{T/2}^{0} (-1)\cdot f(u)\cos(k\omega u)\,du + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt,
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Substitution $u = -t$ vorgenommen haben. Durch Vertauschen der Integralgrenzen folgt die Behauptung.

Aufgabe 3. Ungerade Rechteckumpulsfolge
Man berechne die reelle Fourierreihe der ungeraden Rechteckimpulsfolge (siehe Abb 1, an den Sprungstellen nehme die Funktion den Wert 0 an).

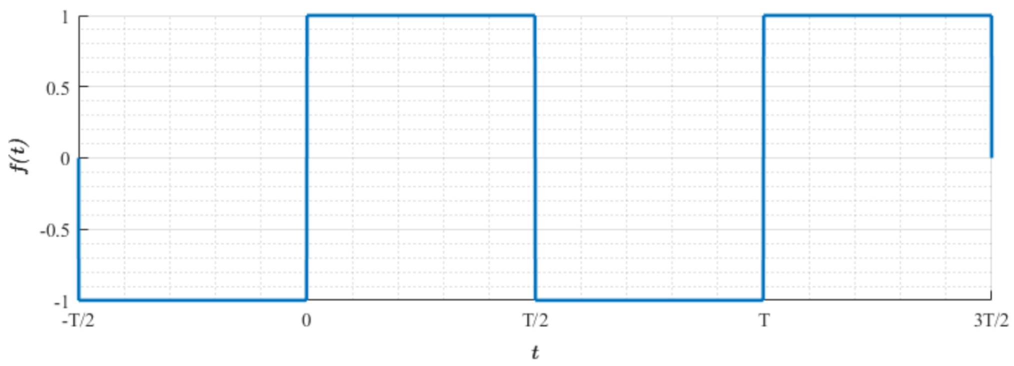

Abbildung 1: Ungerade Rechteckimpulsfolge

Lösung Aufgabe 3. Wir bezeichnen den betrachteten Rechteckimpuls mit f_3. Es gilt

$$f_3(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T/2 \\ 0, & t = T/2 \\ -1, & T/2 \leq t < T \end{cases}$$

und damit $f_3(-t) = -f_3(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es folgt $a_k =$ für alle $k = 0, 1, \ldots$. Wir rechnen weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{T}{2} b_k &= \int_0^{T/2} \sin(k\omega t) \mathrm{d}t - \int_{T/2}^{T} \sin(k\omega T) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{k\omega} \cos(k\pi) + \frac{1}{k\omega} \cos(0) + \frac{1}{k\omega} \cos(2\pi k) - \frac{1}{k\omega} \cos(k\pi) = \\
&= \frac{1}{k\omega} \left(-\cos(k\pi) + 2 - \cos(k\pi)\right) \\
&= \frac{2}{k\omega}(1 - \cos(k\pi)).
\end{aligned}$$

Da

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1, & k \equiv 0 \mod 2 \\ -1, & k \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

schließen wir

$$b_k = \frac{4}{k\omega T}(1 - (-1)^k).$$

(Die Schreibweise $k \equiv 1 \mod 2$ bedeutet, dass $k - 1$ durch 2 ganzzahlig teilbar ist, usw.) Die Fourierreihe lautet also

$$f_3(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\omega T}(1 - (-1)^k) \sin(k\omega t) = \frac{8}{\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin((2n+1)\omega t).$$

Man erkennt, dass die Fourierreihe an der Stelle $t = \frac{T}{2}$, den Wert $f_3(\frac{T}{2}) = 0$ annimmt. Wäre z.B. $f_3(\frac{T}{2}) = 1$ definiert, ergäben sich die gleichen Fourierkoeffizienten und die

Reihe wäre nicht exakt. Folglich ist bei der Fourierriehenentwicklung auf Sprungstellen zu achten, da an diesen u.U. eine Abweichung zwischen dem Wert der Reihe und dem Funktionswert auftreten kann.

Aufgabe 4. Dreieckimpulsfolge
Man berechne die reelle Fourierreihe der in Abb. 2 dargestellten Dreieckimpulsfolge.

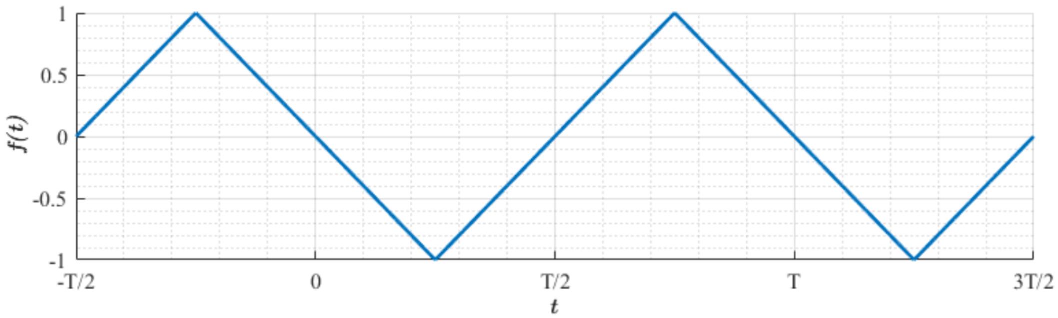

Abbildung 2: Dreieckimpulsfolge

Lösung Aufgabe 4. Wir bezeichnen den betrachteten Dreieckimplus mit f_4. Es gilt

$$f_4(t) = \begin{cases} -\frac{4}{T} \cdot t, & -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} \\ \frac{4}{T} \cdot t - 2, & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} \end{cases}. \tag{10}$$

Wir überlegen uns zuerst:

$$\begin{aligned} \sin\left(\tfrac{3\pi k}{2}\right) &= \sin\left(k\pi + \tfrac{\pi k}{2}\right) = \sin(k\pi)\cos\left(\tfrac{\pi k}{2}\right) + \cos(k\pi)\sin\left(\tfrac{\pi k}{2}\right) = \\ &= \begin{cases} 0, & k \equiv 0,2 \mod 4 \\ -1, & k \equiv 1 \mod 4 \\ 1, & k \equiv 3 \mod 4 \end{cases} = -\sin\left(\tfrac{\pi k}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{-\pi k}{2}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

sowie

$$\begin{aligned} \cos\left(\tfrac{3\pi k}{2}\right) &= \cos\left(k\pi + \tfrac{\pi k}{2}\right) = \cos(k\pi)\cos\left(\tfrac{\pi k}{2}\right) - \sin(k\pi)\sin\left(\tfrac{\pi k}{2}\right) = \\ &= \begin{cases} 0, & k \equiv 1,3 \mod 4 \\ 1, & k \equiv 0 \mod 4 \\ -1, & k \equiv 2 \mod 4 \end{cases} = \cos\left(\tfrac{\pi k}{2}\right) = \cos\left(\tfrac{-\pi k}{2}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Weiter bemerken wir mit Aufgabe 2, dass $a_k = 0$ für alle $k = 0, 1, \ldots$. Nun rechnen wir:

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/4}^{T/4} -\frac{4t}{T}\sin(k\omega t)\,dt + \int_{T/4}^{3T/4} (\frac{4t}{T}-2)\sin(k\omega t)\,dt\right] \\
&= \frac{8}{T^2}\left[\int_{T/4}^{3T/4} t\sin(k\omega t)\,dt - \frac{T}{2}\int_{T/4}^{3T/4} \sin(k\omega t)\,dt - \int_{-T/4}^{T/4} t\sin(k\omega t)\,dt\right] \\
&= \frac{8}{T^2}\left[\left(\frac{\sin(k\omega t)}{k^2\omega^2} - \frac{t\cos(k\omega t)}{k\omega}\Big|_{T/4}^{3T/4}\right) - 0 - \left(\underbrace{\frac{\sin(k\omega t)}{k^2\omega^2}}_{=:S(t)} - \underbrace{\frac{t\cos(k\omega t)}{k\omega}}_{=:C(t)}\Big|_{-T/4}^{T/4}\right)\right] \\
&= \frac{8}{T^2}\big[S(3T/4) - C(3T/4) - S(T/4) + C(T/4) \\
&- S(T/4) + C(T/4) + S(-T/4) - C(-T/4)\big] = \\
&\underset{(12)}{=} \frac{8}{T^2}\cdot 4\cdot S(-T/4) \\
&= -\frac{8}{T^2}\cdot\frac{4}{k^2\omega^2}\sin\left(\tfrac{k\pi}{2}\right) = -\frac{8\cdot 4}{(2\pi)^2k^2}\sin\left(\tfrac{k\pi}{2}\right) \\
&\underset{(11)}{=} -\frac{8}{\pi^2k^2}\begin{cases} 0, & k\equiv 0,2 \mod 4 \\ 1, & k\equiv 1 \mod 4 \\ -1, & k\equiv 3 \mod 4 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir ausgenutzt:

$$\int t\sin(k\omega t)\ dt = -t\cdot\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega} + \int \frac{\cos(k\omega t)}{k\omega}\ dt.$$

Folglich erhalten wir

$$
\begin{aligned}
f_4(t) &= -\frac{8}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega t) - \frac{1}{7^2}\sin(7\omega t) \pm \ldots\right] \\
&= -\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin((2n+1)\omega t).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5. Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(t)\to 0$, wenn $|t|\to\infty$, sowie $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\ \mathrm{d}t < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|\ \mathrm{d}t < \infty$. Man zeige die Beziehung

$$\widehat{f'}(\omega) = j\omega\widehat{f}(\omega), \quad \omega\in\mathbb{R},$$

zwischen der Fourier-Transformierten $\widehat{f}$ von f und der Fourier-Transformierten $\widehat{f'}$ von f'.

Lösung Aufgabe 5. Motivation zur Fourier-Transformation: Mit der Fourier Reihe können keine nicht-periodische Funktionen beschrieben werden. Ein nicht-periodisches Signal kann als Signal mit Periodedauer von $T\to\infty$ betrachtet werden. Bei diesem Grenzübergang würde das Ampplitudenspektrum der komplexen Fourierreihe c_k verschwinden. Deshalb wird das Amplitudendichtesprektrum eingeführt:

$$F(\omega) = \int_{c-T/2}^{c+T/2} f(t)e^{-j\omega t}$$

Durch Grenzübergang $T \to \infty$ ergibt sich die Fourier-Transformation:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

Wir rechnen mit Hilfe partieller Integration:

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \\ &= \underbrace{f(t) e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-j\omega) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = j\omega \widehat{f}(\omega).\end{aligned}$$