Carsten Herzog, M. Sc.
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung FT 2021

Übung 7 - Lösung

Aufgabe 1. Diskretes Übertragungssystem
Ein kontinuierliches System sei durch die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10(s+5)}{s(s+2)}$$

gegeben.

Aufgaben

a) Bestimme Sie die äquivalente z-Übertragungsfunktion $G_z(z)$ des diskretisierten Systems für die Abtastperiode $T > 0$ und ein Halteglied 0-ter Ordnung. Stellen Sie das Ergebnis in der Form

$$G_z(z) = \frac{\beta(z - z_n)}{(z-1)(z-z_p)} \tag{1}$$

mit anzugebenden Konstanten $\beta, z_n, z_p \in \mathbb{R}$ dar.

b) Beschreiben Sie das diskretisierte System in Form einer Differenzengleichung ausgehend von der Darstellung in (1).

Lösung Aufgabe 1. a) Mittels Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4(s+2)} - \frac{1}{4s}.$$

Daraus schließen wir mit Hilfe von Tabelle 3.3:

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(5 \cdot \frac{2}{s(s+2)} + 25\frac{1}{s^2} + \frac{25}{2}\frac{1}{s+2} - \frac{25}{2}\frac{1}{s}\right)\Big|_{t=kT}\right) = \\
&= \frac{z-1}{z}\left(5\frac{(1-e^{-2T})z}{(z-1)(z-e^{-2T})} + 25\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{25}{2}\frac{z}{z-e^{-2T}} - \frac{25}{2}\frac{z}{z-1}\right) = \\
&= \frac{z(5 - 5e^{-2T} + 25T - 25 + \frac{25}{2}e^{-2T} + \frac{25}{2}) - (5 - 5e^{-2T} + 25Te^{-2T} - \frac{25}{2} + \frac{25}{2}e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})}.
\end{aligned}$$

Da $(5 - 5e^{-2T} + 25T - 25 + \frac{25}{2}e^{-2T} + \frac{25}{2})$ positiv ist für alle $T > 0$, setzen wir β gleich dieser Größe sowie $z_p = e^{-2T}$, $z_n = (5 - 5e^{-2T} + 25Te^{-2T} - \frac{25}{2} + \frac{25}{2}e^{-2T})/\beta$ und erhalten Darstellung (1).

b) Aus

$$\frac{\beta(z-z_n)}{(z-1)(z-z_p)} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

schließen wir zusammen mit dem Rechtsverschiebungssatz auf

$$\beta u_{k-1} - u_{k-2} z_n = y_k - y_{k-1} z_p - y_{k-1} + z_p y_{k-2}.$$

Aufgabe 2. Zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung
Gegeben sei das zeitdiskrete System

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \beta \\ \alpha & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Aufgaben

a) Zeigen Sie, dass -2 und $-2 \pm \sqrt{1+\alpha}$ die Eigenwerte von A sind.

b) Geben Sie hinreichende und notwendige Bedingungen für $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ an, so dass für das angegebene System jeweils folgenden Eigenschaften gelten:

   i)
   $$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = 3.$$

   ii) Für alle Eigenwerte $\lambda \neq 0$ von A gilt
   $$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} \lambda \operatorname{id} - A & B \end{pmatrix} = 3.$$

Lösung Aufgabe 2. a) Das charakteristische Polynom von A lautet

$$X^3 + 6X^2 - \alpha X + 11X - 2\alpha + 6.$$

Auch ohne die Angabe der Nullstellen in der Aufgabenstellung können wir auf die Nullstellen wie folgt schließen: Damit Terme mit α verschwinden ist -2 als möglicher Kandidat einen Versuch wert. In der Tat, -2 ist Nullstelle. Wir führen eine Polynomdivision mit $X+2$ durch und erhalten

$$(X^3 + 6X^2 - \alpha X + 11X - 2\alpha + 6) : (X+2) = X^2 + 4X + (3-\alpha)$$

Daraus schließen wir schnell auf die anderen beiden Nullstellen.

b)

i) Es gilt

$$Q_S := \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3+\alpha \\ 0 & \beta & -5\beta+\alpha\beta \\ 1 & -3+\alpha & 9-3\alpha \end{pmatrix},$$

und folglich

$$\det Q_S = -3\beta + 4\alpha\beta - \alpha^2\beta = -\beta(\alpha^2 - 4\alpha + 3).$$

Daher

$$\det Q_S = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha = 3.$$

Also ist das System vollständig erreichbar genau dann, wenn $\beta \neq 0$ und $\alpha \notin \{1, 3\}$.

ii) Wir berechnen für jeden Eigenwert $\lambda \neq 0$ von A den Rang von $(\lambda\,\mathrm{id} - A \quad B)$. Für $\lambda = -2$ gilt

$$(-2\,\mathrm{id} - A \quad B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher hat $(-2\,\mathrm{id} - A \quad B)$ vollen Rang genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \\ -\alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} = \beta \cdot (1-\alpha) \neq 0,$$

also genau dann, wenn

$$\beta \neq 0 \quad \text{und} \quad \alpha \neq 1. \tag{2}$$

Für $\lambda = -2 - \sqrt{\alpha+1}$ gilt

$$(\lambda\,\mathrm{id} - A \quad B) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha+1}-1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{\alpha+1} & -\beta & 0 \\ -\alpha & 0 & 1-\sqrt{\alpha+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\mathrm{Rang}(\lambda\,\mathrm{id} - A \ B) = 3$ genau dann, wenn eine der folgenden vier Determinanten verschieden von Null ist:

$$\det \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha+1}-1 & 0 & -1 \\ 0 & -\sqrt{\alpha+1} & -\beta \\ -\alpha & 0 & 1-\sqrt{\alpha+1} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\det\begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha+1}-1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{\alpha+1} & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha+1}\cdot(\sqrt{\alpha+1}-\alpha+1), \tag{4}$$

$$\det\begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha+1}-1 & 1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \\ -\alpha & 1-\sqrt{\alpha+1} & 1 \end{pmatrix} = \beta(1+\sqrt{\alpha+1}-\alpha), \tag{5}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\sqrt{\alpha+1} & -\beta & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{\alpha+1} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha+1}\cdot(\sqrt{\alpha+1}-2). \tag{6}$$

Die Determinante in (3) ist 0. Die Determinante in (4) ist ungleich 0 genau dann, wenn $\alpha \notin \{-1,3\}$. Die Determinante in (5) ist ungleich 0 genau dann, wenn $\beta \neq 0$ und $\alpha \neq 3$. Die Determinante in (6) ist ungleich 0 genau dann, wenn $\alpha \notin \{-1,3\}$. Insgesamt erhalten wir

$$\operatorname{Rang}(\lambda\,\mathrm{id} - A\ B) = 3 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \notin \{-1,3\} \text{ oder } (\beta \neq 0 \text{ und } \alpha \neq 3). \tag{7}$$

Für $\lambda = -2+\sqrt{\alpha+1}$ ($\lambda \neq 0$, wenn $\alpha \neq 3$) gilt

$$(\lambda\,\mathrm{id} - A\ B) = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha+1}-1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \sqrt{\alpha+1} & -\beta & 0 \\ -\alpha & 0 & \sqrt{\alpha+1}+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt: $\operatorname{Rang}(\lambda\,\mathrm{id} - A\ B) = 3$ genau dann, wenn eine der folgenden Determinanten ungleich 0 ist.

$$\det\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha+1}-1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{\alpha+1} & -\beta \\ -\alpha & 0 & \sqrt{\alpha+1}+1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\det\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha+1}-1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{\alpha+1} & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha+1}\cdot(\alpha+\sqrt{\alpha+1}-1) \tag{9}$$

$$\det\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha+1}-1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \\ -\alpha & \sqrt{\alpha+1}+1 & 1 \end{pmatrix} = \beta(1-\alpha-\sqrt{\alpha+1}), \tag{10}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{\alpha+1} & -\beta & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha+1}+1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha+1}\cdot(\sqrt{\alpha+1}+2). \tag{11}$$

Die Determinante in (8) ist 0. Die Determinante in (9) ist ungleich 0 genau dann, wenn $\alpha \neq -1$. Die Determinante in (10) ist ungleich 0 genau dann, wenn $\beta \neq 0$ und $\alpha \neq 0$. Die Determinante in (11) ist ungleich 0 genau dann, wenn $\alpha \neq -1$.

Nun nehmen wir zunächst an, dass das System (A, B) vollständig steuerbar sei. Aus (2) schließen wir, dass $\beta \neq 0$ und $\alpha \neq 1$ gilt. Aus (7) schließen wir, dass $\alpha \neq 3$ gilt. Wir erhalten insgesamt

Ist (A, B) vollständig steuerbar, so folgt $\beta \neq 0$ und $\alpha \notin \{1, 3\}$.

Umgekehrt nehmen wir nun an, dass $\beta \neq 0$ und $\alpha \notin \{1, 3\}$ gilt. Dann ist (2) und (7) erfüllt, und die Determinanten in, beispielsweise, (9) oder (10) sind verschieden von Null (denn ist $\alpha = -1$, so ist $\alpha \neq 0$, und umgekehrt). Also folgt aus dem Hautus-Kriterium:

Aus $\beta \neq 0$ und $\alpha \notin \{1, 3\}$ folgt, dass (A, B) vollständig steuerbar ist.