



Übung 5 - Lösung

Aufgabe 1. z-Übertragungsfunktion

Berechnen Sie eine z -Übertragungsfunktion, die ein PDT_1 -System bei einer Abtastzeit von $T > 0$ beschreibt auf zwei verschiedene Arten:

- durch Berechnung der äquivalenten z -Übertragungsfunktion,
- durch Diskretisierung der Differenzialgleichung $T_1 \dot{y}(t) + y(t) = K[u(t) + T_D \dot{u}(t)]$, wobei K , T_D und T_1 positive Konstanten sind.

Zur Erinnerung, die kontinuierliche Übertragungsfunktion eines PDT_1 -Systems lautet

$$G_{PDT_1}(s) = K \cdot \frac{1 + sT_D}{1 + sT_1}.$$

Lösung Aufgabe 1. a)

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right) = \\ &= \frac{z-1}{z} \cdot K \cdot \mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1 + sT_D}{s(1 + sT_1)} \right) \Big|_{t=kT} \right) \\ &= \frac{z-1}{z} \cdot K \cdot \mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(T_D \frac{1/T_1}{s + 1/T_1} + \frac{1/T_1}{s(s + 1/T_1)} \right) \Big|_{t=kT} \right) \\ &= \frac{z-1}{z} \cdot K \left(\frac{T_D}{T_1} \cdot \frac{z}{z - e^{-T/T_1}} + \frac{(1 - e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z - e^{-T/T_1})} \right) \\ &= K \cdot \left(\frac{T_D}{T_1} \frac{z-1}{z - e^{-T/T_1}} + \frac{1 - e^{-T/T_1}}{z - e^{-T/T_1}} \right) \\ &= K \cdot \frac{T_D}{T_1} \cdot \frac{z - (1 + T_1/T_D e^{-T/T_1} - T_1/T_D)}{z - e^{-T/T_1}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} T_1 \cdot \frac{y(k) - y(k-1)}{T} + y(k) &= K \cdot \left(u(k) + T_D \frac{u(k) - u(k-1)}{T} \right) \\ \iff (1 + T_1/T)Y(z) - (T_1/T)z^{-1}Y(z) &= K \cdot \left(U(z) + (T_D/T)(U(z) - z^{-1}U(z)) \right) \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
 G(z) &= K \cdot \frac{(1 + \frac{T_D}{T})z - \frac{T_D}{T}}{(1 + \frac{T_1}{T})z - \frac{T_1}{T}} \\
 &= K \cdot \frac{T + T_D}{T + T_1} \cdot \frac{z - \frac{T_D}{T+T_D}}{z - \frac{T_1}{T+T_1}}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Diskreter Regelkreis

In Übung 4, Aufgabe 1 wurde eine kontinuierliche Strecke mit Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{K_s}{s(1+sT_s)}$ betrachtet. Die äquivalente z -Übertragungsfunktion $G(z)$ bei Abtastzeit $T > 0$ lautet

$$G(z) = K_s \frac{(T - T_s + T_s z_p)z + T_s - z_p(T + T_s)}{(z - 1)(z - z_p)}, \quad K_s > 0, T_s > 0$$

mit $z_p = e^{-T/T_s}$.

Aufgaben

- a) Schließen Sie den zeitdiskreten Regelkreis mit einem zeitdiskreten PDT_1 -Regler, so dass die Pole des geschlossenen, zeitdiskreten Regelkreises bei

$$q_{\pm} = e^{p_{\pm}T}, \quad p_{\pm} = -\pi/2 \pm j\pi/2 \quad (1)$$

liegen. Verwenden Sie

$$G_{PDT_1}(z) = K \cdot \frac{z - a}{z - b}$$

als z -Übertragungsfunktion des Reglers mit den Konstanten K, a, b .

- b) Berechne die Konstanten K, a, b aus a) für die Daten $K_s = 1$, $T_s = 2$, $T = 0.2$ und q_{\pm} wie in Gl. (1) angegeben.

Lösung Aufgabe 2. Wir fassen Konstanten zusammen und schreiben

$$G(z) = \frac{k_2 z + k_1}{(z - 1)(z - z_p)}$$

Die Pole des geschlossenen, zeitdiskreten Regelkreises sind die Nullstellen von

$$1 + G_{PDT_1}(z)G(z) = 1 + K \frac{z - a}{z - b} \cdot \frac{k_2 z + k_1}{(z - 1)(z - z_p)}$$

Um die Zahl der Pole von drei auf zwei zu reduzieren setzen wir zunächst $a = z_p$. Um Pole bei q_{\pm} zu konstruieren machen wir folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}
 (z - 1)(z - b) + K k_2 z + K k_1 &= (z - q_+)(z - q_-) \\
 \iff z^2 - z(1 + b - K k_2) + b + K k_1 &= z^2 - z(q_+ + q_-) + q_+ q_-
 \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$1 + b - Kk_2 = q_+ + q_-$$

$$b + Kk_1 = q_+ q_-$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & -k_2 \\ 1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_+ + q_- - 1 \\ q_+ q_- \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{pmatrix} b \\ K \end{pmatrix} = \frac{1}{k_1 + k_2} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_+ + q_- - 1 \\ q_+ q_- \end{pmatrix}.$$

Mit den angegebenen Daten erhält man $a \approx 0,90$, $b \approx 0,46$ und $K \approx 7,58$.