Carsten Herzog, M. Sc.
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung FT 2021

Übung 3, 03. Mai 2021

Thema: z-Transformation

Aufgabe 1. z-Transformation von Folgen

Gegeben sind die Folgen $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$

- $f_k = (-a)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $|z| > |a| \geq 1$, $a \in \mathbb{C}$.
- $f_k = \begin{cases} 1, & k = 0, 2, 4, \ldots \\ 0, & k = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$
- $f_k = \frac{1}{2}(kT)^2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $T > 0$.
- $f_k = \frac{T^2}{2}k(k-1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $T > 0$.
- $f_k = \sin(k\omega T)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $\omega > 0$, $T > 0$.

Bestimmen Sie die z-Transformation

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k},$$

für alle gegebenen Folgen. Es gilt $|z| > 1$, sowie

$$\sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = \frac{z}{(z-1)^2}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^{-k} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}. \tag{2}$$

für $|z| > 1$

Aufgabe 2. Residuenmethode
Die z-Transformation einer Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist durch

a)
$$F(z) = \frac{z-a}{(z-b)(z-c)}$$
mit $a, b, c \in \mathbb{C}$, $b \neq c$;

b)
$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

gegeben. Bestimmen Sie jeweils die Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ mittels der Residuenmethode (siehe Skript).

Aufgabe 3. Differenzengleichungen
Für $k \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in \{0, 1\}$ und die Folge $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ ist durch

$$y_k = \alpha y_{k-1} + \beta u_{k-\epsilon} \tag{3}$$

eine Differenzengleichung gegeben. Wird ein PT_1-System gegeben durch $T_1\dot{y}(t)+y(t) = u(t)$ mit Periode $T > 0$ abgetastet und $\dot{y}(kT)$ durch den Rückwärtsdifferenzenquotienten $\frac{y(kT)-y((k-1)T)}{T} = \frac{y_k-y_{k-1}}{T}$ approximiert, so entsteht laut Vorlesung eine Differenzengleichung der Form (3) mit Konstanten

$$\alpha = T_1/(T+T_1),\ \beta = T/(T+T_1),\ \epsilon = 0. \tag{4}$$

Aufgaben

a) Verifizieren Sie, dass die durch (3) gegebene Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ durch
$$y_k = \alpha^k y_0 + \beta \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha^\nu u_{k-\epsilon-\nu} \tag{5}$$
und $y_0 \in \mathbb{R}$ berechnet werden kann.

b) Sei $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ gegeben durch $u_\nu = 0$ für alle $\nu < 0$ und $u_\nu = 1$ für alle $\nu \geq 0$ (Sprungfolge). Diskutieren Sie die Existenz des Grenzwertes $\lim_{k\to\infty} y_k$ in Abhängigkeit von α.
Hinweis: Es gilt $\sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha^\nu = \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$ für $\alpha \neq 1$.