Carsten Herzog, M. Sc.
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung FT 2021

Übung 2 - Lösung

Thema: Fourier-Transformation

Aufgabe 1. Inverse Fourier-Transformation

Man bestimme eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deren Fourier-Transformierte gegeben ist durch

$$F(i\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_0}, & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $\omega_0 > 0$ gilt.

Lösung Aufgabe 1.

Die inverse Fourier-Transformation ist gegeben durch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} \, d\omega.$$

Durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{1}{2\omega_0} e^{i\omega t} \, d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega t} \, d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi \cdot i\omega_0 t} \left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t} . \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Komplexe Fourierreihen

Sei $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein einzelner Rechteckimpuls gegeben durch

$$r(t) = \begin{cases} 1/T_r, & |t| \leq T_r/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $T_r > 0$ und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Signal gegeben durch

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\delta t} \sin(\omega_g t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

mit Konstanten $\delta > 0$, $\omega_g > 0$.

a) Man bestimme die komplexe Fourierreihe der Rechteckimpulsfolge

$$s(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t - kT_s)$$

mit Periode $T_s > T_r/2 > 0$, siehe Abbildung 1. Man stelle einen Zusammenhang zwischen s und der Fourier-Transformation von r her.

b) Man bestimme die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}(g)$ von g und stelle einen Zusammenhang zur Laplace-Transformierten $\mathcal{L}(g)$ von g her.

c) Man bestimme das Spektrum des mit der Abtastzeit T_s abgetasteten Signals $g^{\#} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siehe Abbildung 2, welches gegeben sei durch

$$g^{\#}(t) := g(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t - kT_s).$$

Hinweis: Man verwende bei der Berechnung die Ergebnisse aus Aufgabenteil a) und b).

d) Man skizziere das Amplitudenspektrum von g und $g^{\#}$.

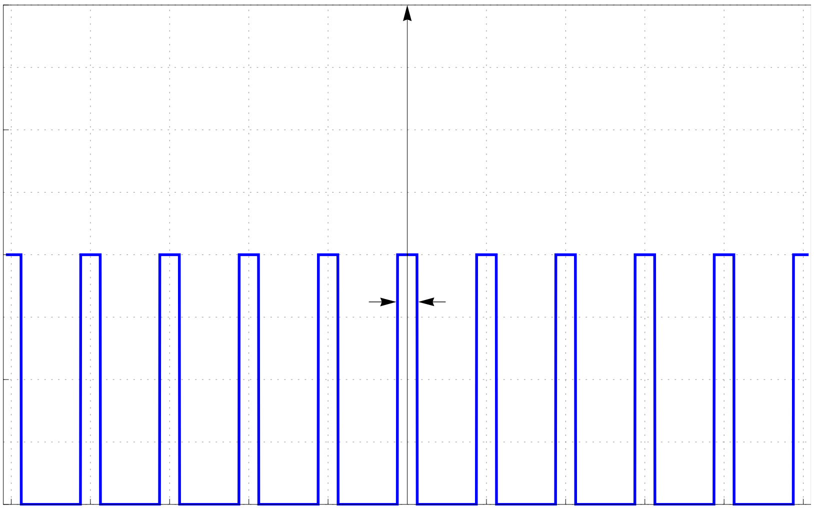

Abbildung 1: Rechteckimpulsfolge

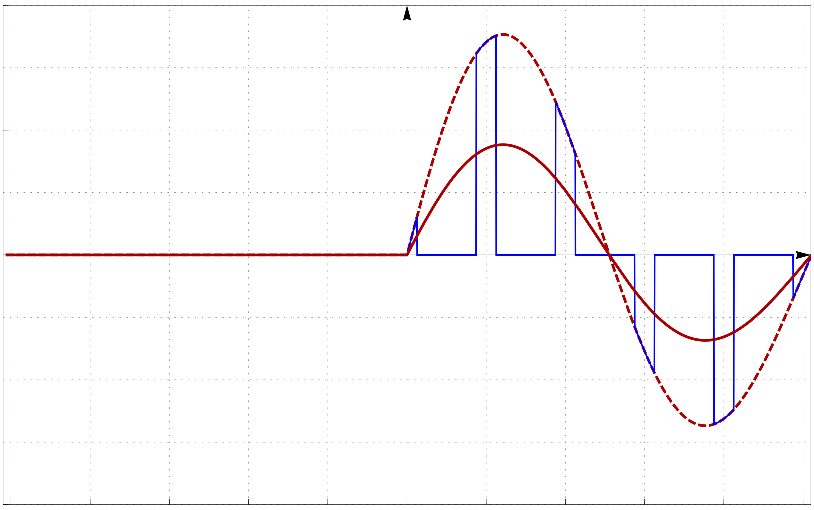

Abbildung 2: abgetastetes Signal

Lösung Aufgabe 2.

a)

$$c_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} r(t) \cdot e^{-ik\omega_s t} \, dt = \frac{1}{T_s} \mathcal{F}(r)(k\omega_s).$$

Also

$$s(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(r)(k\omega_s) e^{ik\omega_s t}.$$

Mit $\omega_s = 2\pi/T_s$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ergeben sich die Koeffizienten der Fourrierreihe

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} r(t) \cdot e^{-ik\omega_s t} \, dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_r/2}^{T_r/2} \frac{1}{T_r} \cdot e^{-ik\omega_s t} \, dt \\ &= 2 \cdot \frac{1}{T_s} \frac{\sin(k\omega_s T_r/2)}{k\omega_s T_r} = \frac{\sin(k\pi T_r/T_s)}{k\pi T_r}. \end{aligned}$$

b) Wir berechnen zuerst für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\beta) \neq 0$ das Integral

$$I := \int_0^\infty e^{-\beta t} \sin(\alpha t)\, dt$$

vermöge zweifacher partieller Integration (zunächst mit $u := \sin(\alpha t)$, $v' := e^{-\beta t}$):

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\beta t} \sin(\alpha t)\, dt &= \underbrace{\sin(\alpha t) \cdot \left(-\frac{1}{\beta} e^{-\beta t}\right)\Big|_0^\infty}_{=0} - \frac{\alpha}{-\beta} \int_0^\infty e^{-\beta t} \cos(\alpha t)\, dt \\
&= \frac{\alpha}{\beta}\left(\underbrace{-\cos(\alpha t) \cdot \frac{1}{\beta} e^{-\beta t}\Big|_0^\infty}_{=1/\beta} - \frac{\alpha}{-\beta} \int_0^\infty e^{-\beta t} \underbrace{(-\sin(\alpha t))}_{\frac{d}{dt}\cos(\alpha t) = -\alpha \sin(\alpha t)} dt \right) \\
&= \frac{\alpha}{\beta^2}\left(1 - \alpha \underbrace{\int_0^\infty e^{-\beta t} \sin(\alpha t)\, dt}_{=I} \right).
\end{aligned}$$

Es folgt $(1 + \alpha^2/\beta^2) I = \alpha/\beta^2$, d.h. da nach Voraussetzung $1 + \alpha^2/\beta^2 \neq 0$ gilt

$$I = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Damit folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g)(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-\delta t} \sin(\omega_g t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(\delta + i\omega)t} \sin(\omega_g t)\, dt \\
&= \frac{\omega_g}{(\delta + i\omega)^2 + \omega_g^2}.
\end{aligned}$$

Die Laplace-Transformierte von g ist

$$\mathcal{L}(g)(s) := \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{-\delta t} \sin(\omega_g t)\, dt.$$

Für $s = i\omega$ gilt daher $\mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{L}(g)(i\omega)$. Ferner gilt auch $\mathcal{L}(\sin(\omega_g t))(\delta + i\omega) = \mathcal{F}(g)(\omega)$.

c)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(g^{\#})(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g^{\#}(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cdot s(t)\cdot e^{-i\omega t}\, dt = \\
&\underset{\text{(i)}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_s t}}_{s(t)} \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i(\omega - k\omega_s)t}\, dt = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \mathcal{F}(g)(\omega - k\omega_s) = \\
&\underset{\text{(ii)}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi T_r/T_s)}{k\pi T_r} \cdot \frac{\omega_g}{(\delta + i(\omega - k\omega_s))^2 + \omega_g^2} \\
&= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi T_r/T_s)}{k\pi T_r/T_s} \cdot \frac{\omega_g}{(\delta + i(\omega - k\omega_s))^2 + \omega_g^2}.
\end{aligned}
$$

Für ein beliebiges Signal $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt allgemeiner

$$
\mathcal{F}(g^{\#})(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi T_r/T_s)}{k\pi T_r/T_s} \cdot \mathcal{F}(g)(\omega - k\omega_s).
$$

d) Siehe Abb. 3 und Abb. 4.

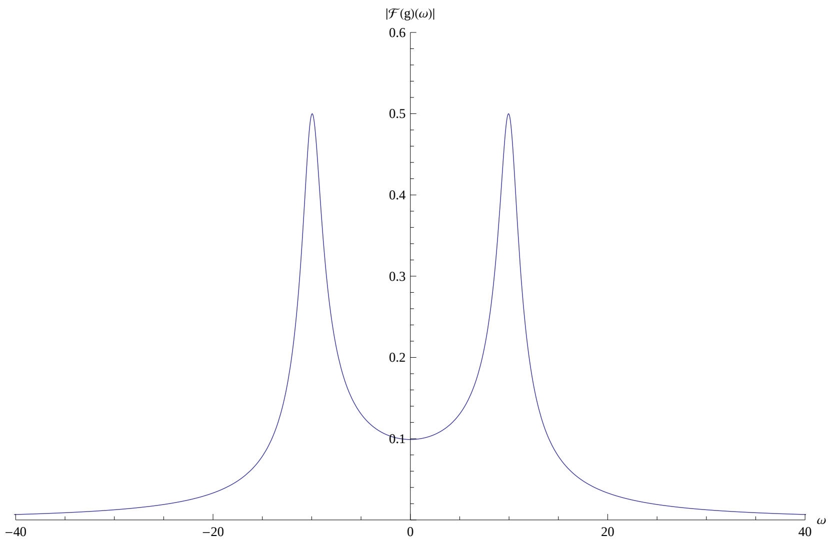

Abbildung 3: Amplitudenspektrum von $\mathcal{F}(g)$ für $\delta = 1$, $\omega_g = 10$

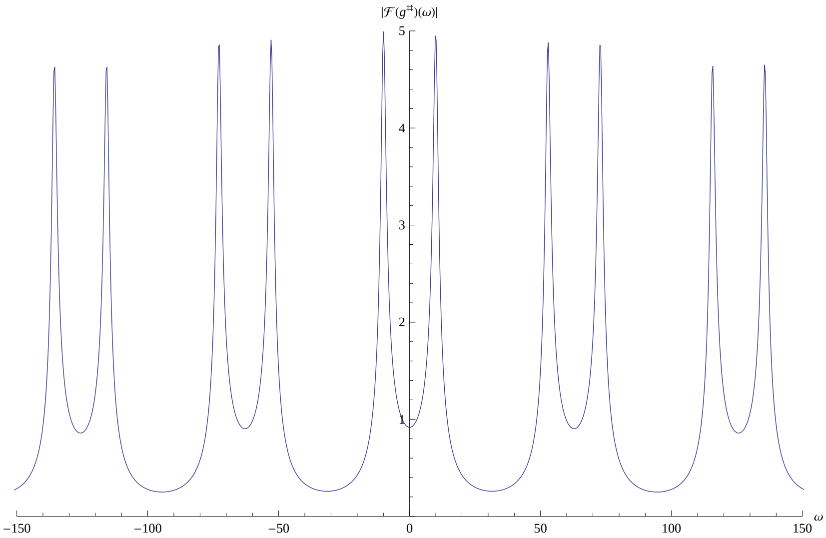

Abbildung 4: Amplitudenspektrum von $\mathcal{F}(g^{\#})$ für $\delta = 1$, $\omega_g = 10$ und $T_r = 0.01$, $T_s = 0.10$

Anhang

Satz 1 (Abtasttheorem von Shannon, vgl. Skript Satz 2.1, S.21)**.**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein stetiges und bandbegrenztes Signal, d.h. $\hat{f}(\omega) = 0$ falls $|\omega| > \omega_b$ für ein $\omega_b > 0$, wobei $\hat{f}$ die Fourier-Transformierte von f bezeichnet. Ferner gelte außer $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ noch $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$. Dann folgt

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\frac{2\pi}{\omega_s}) \cdot \frac{\sin((t - k\frac{2\pi}{\omega_s})\frac{\omega_s}{2})}{(t - k\frac{2\pi}{\omega_s})\frac{\omega_s}{2}}$$

falls $\omega_s \geq 2\omega_b$. In Worten: wird das Signal mit einer Abtastzeit von höchstens $2\pi/\omega_s$ abgetastet, so ist f eindeutig durch die Folge der Funktionswerte $\{f(k \cdot \frac{2\pi}{\omega_s}) : k \in \mathbb{Z}\}$ bestimmt.

Beweis. Man beachte, dass im Folgenden jede Vertauschung der Form $\int \sum = \sum \int$ mathematisch gesehen nicht trivial ist. Für die Zwecke der Vorlesung soll dies jedoch außer Acht bleiben.
Es gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \hat{f}(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \hat{f}_{\text{per}}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

mit

$$\hat{f}_{\text{per}}(\omega) := \begin{cases} \hat{f}(\omega), & \omega \in [-\omega_s/2, \omega_s/2] \\ \hat{f}(\omega - k\omega_s), & \omega \in [(2k-1)\omega_s/2, (2k+1)\omega_s/2],\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Da $\hat{f}_{\text{per}}$ periodisch ist mit Periode ω_s (hier geht ein, dass $\omega_s \geq 2\omega_b$) können wir die komplexe Fourierreihe von $\hat{f}_{\text{per}}$ aufschreiben:

$$\hat{f}_{\text{per}}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{\omega_s}\omega}.$$

Für $l \in \mathbb{Z}$ berechnen wir nun $f(l\frac{2\pi}{\omega_s})$.

$$f(l\frac{2\pi}{\omega_s}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{\omega_s}\omega} e^{i\omega l\frac{2\pi}{\omega_s}}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} e^{i\omega(k+l)\frac{2\pi}{\omega_s}}\, d\omega.$$

Nun gilt

$$\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} e^{i\omega(k+l)\frac{2\pi}{\omega_s}}\, d\omega = \begin{cases} \omega_s, & l = -k \\ 0, & l \neq -k \end{cases},$$

denn für $k + l \neq 0$ gilt

$$\frac{e^{i\omega_s/2(k+l)\frac{2\pi}{\omega_s}} - e^{-i\omega_s/2(k+l)T_s}}{i(k+l)\frac{2\pi}{\omega_s}} = \frac{e^{i\pi(k+l)} - e^{-i\pi(k+l)}}{i(k+l)\frac{2\pi}{\omega_s}} = 0.$$

Es folgt

$$\frac{2\pi}{\omega_s} \cdot f(l\frac{2\pi}{\omega_s}) = c_{-l}$$

für alle $l \in \mathbb{Z}$. Dies eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\omega_s} f(k\frac{2\pi}{\omega_s}) e^{-ik\frac{2\pi}{\omega_s}\omega} e^{i\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_s}{2}\frac{2\pi}{\omega_s} f(k\frac{2\pi}{\omega_s}) \frac{e^{i(t-k\frac{2\pi}{\omega_s})(\omega_s/2)} - e^{-i(t-k\frac{2\pi}{\omega_s})(\omega_s/2)}}{i(t-k\frac{2\pi}{\omega_s})(\omega_s/2)}. \end{aligned}$$

Also

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\frac{2\pi}{\omega_s}) \cdot \frac{\sin((t-k\frac{2\pi}{\omega_s})(\omega_s/2))}{(t-k\frac{2\pi}{\omega_s})(\omega_s/2)}.$$

$\square$