Carsten Herzog, M. Sc.
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung FT 2021

Übung 1 - Lösung

Themen: Fourierreihe, Fourier-Transformation

Eine T-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die Eigenschaft $f(t) = f(t+T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei f weiterhin stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar, dann kann f in eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegt werden. Man nennt diese Zerlegung die *reelle Fourierreihe*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right], \tag{1}$$

wobei $\omega = 2\pi/T$ ist. Die reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \in \mathbb{R}$ sind durch

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t) \cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{, für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und} \tag{2}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t) \sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{, für } k \in \mathbb{N} \tag{3}$$

gegeben. Die Konstante $\tau \in \mathbb{R}$ ist dabei beliebig aber fest zu wählen. In der Praxis wird häufig $\tau = 0$ oder $\tau = -T/2$ eingesetzt. Die Funktion f kann ebenso in die *komplexe Fourierreihe*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \tag{4}$$

zerlegt werden, wobei i die imaginäre Einheit ist und für die komplexen Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t) e^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Die Anwendbarkeit der Fourierreihe beschränkt sich auf periodische Funktionen. Wird die Periodendauer T immer weiter ausgedehnt, gelangt man im Grenzfall zu den nichtperiodischen oder auch aperiodischen Vorgängen. Die Fourierreihe geht dann in ein *Fourierintegral*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega$$

mit der *Fourier-Transformierten*

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t$$

über.

Aufgabe 1. T-periodische Funktionen

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion, stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar. Man zeige folgende Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten der reellen und der komplexen Fourierreihe von f für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0, \\ a_k &= c_k + c_{-k}, \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}). \end{aligned}$$

Hinweis: Eulersche Formel: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

Lösung Aufgabe 1.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_k(\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)) + c_{-k}(\cos(-k\omega t) + i\sin(-k\omega t))] \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_k(\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)) + c_{-k}(\cos(k\omega t) - i\sin(k\omega t))] \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(c_k + c_{-k})\cos(k\omega t) + i(c_k - c_{-k})\sin(k\omega t)] \\ &\overset{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)] \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgen die Zusammenhänge $a_0 = 2c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = i(c_k - c_{-k})$.

Aufgabe 2. Eigenschaften T-periodischer Funktionen

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion, stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar. Man zeige für die Koeffizienten a_k und b_k der reellen Fourierreihe von f folgende Eigenschaften:

1. Ist f *ungerade*, d.h. $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$
2. Ist f *gerade*, d.h. $f(-t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Lösung Aufgabe 2.

Für ungerade Funktionen gilt

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos(k\omega t)\,dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right) \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} -f(-t)\cos(k\omega t)\,dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right) \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{T/2}^{0} -f(u)\cos(-k\omega u)\,(-du) + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right) \\
&= \frac{2}{T}\left(-\int_{0}^{T/2} f(u)\cos(k\omega u)\,du + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Der Beweis für gerade Funktionen folgt analog.

Aufgabe 3. T-periodisches Rechtecksignal

Man berechne die reelle Fourierreihe des in Abbildung 1 dargestellten periodischen Rechtecksignals. An den Sprungstellen nehme das Signal den Wert $f(nT/2) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ an.

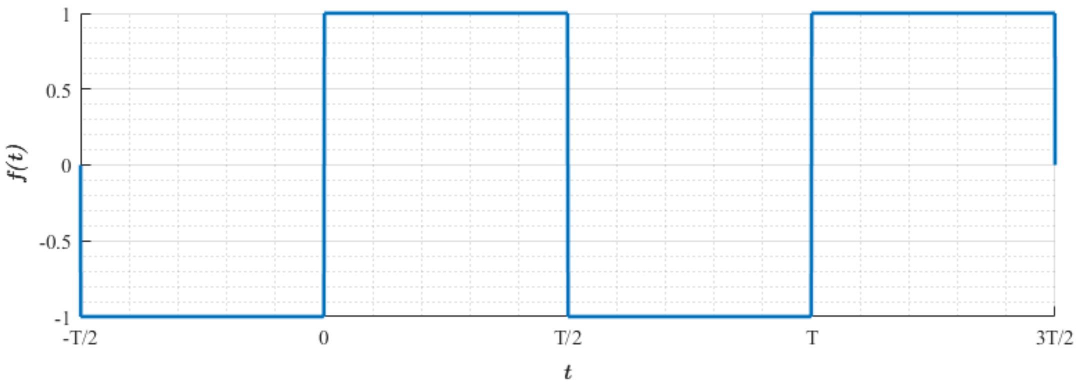

Abbildung 1: T-periodisches Rechtecksignal

Lösung Aufgabe 3.

Für das Rechtecksignal in Abbildung 1 gilt

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, T/2, T \\ 1, & 0 < t < T/2 \\ -1, & T/2 < t < T \end{cases} .$$

Es handelt sich also um eine ungerade Funktion mit $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit folgt $a_0 = a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und für b_k gilt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} 1 \cdot \sin(k\omega t) \mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} (-1) \cdot \sin(k\omega t) \mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(\left[-\frac{1}{k\omega} \cos(k\omega t) \right]_0^{T/2} + \left[\frac{1}{k\omega} \cos(k\omega t) \right]_{T/2}^{T} \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(-\frac{1}{k\omega} \cos(k\pi) + \frac{1}{k\omega} \cos(0) + \frac{1}{k\omega} \cos(k2\pi) - \frac{1}{k\omega} \cos(k\pi) \right) \\ &= \frac{2}{k\omega T} \left(2 - 2\cos(k\pi) \right) . \end{aligned}$$

Mit

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1, & k \equiv 0 \mod 2 \\ -1, & k \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

folgt schließlich

$$b_k = \frac{2}{k\pi}(1 - (-1)^k).$$

Die Schreibweise $k \equiv 1 \mod 2$ bedeutet, dass $k - 1$ durch 2 ganzzahlig teilbar ist. Die Fourierreihe lautet damit

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(1 - (-1)^k) \sin(k\omega t).$$

Man erkennt, dass die Fourierreihe an den Stellen $t = nT/2$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gleich dem Funktionswert $f(nT/2) = 0$ ist. Wäre in der Definition der Funktion beispielsweise $f(nT/2) = 1$ gesetzt worden, ergäben sich die gleichen Koeffizienten und die Fourierreihe würde an den Stellen $t = nT/2$ vom Funktionswert abweichen. Folglich ist bei der Entwicklung von Fourierriehen besonders auf das Verhalten an Sprungstellen zu achten.

Aufgabe 4. T-periodisches Dreiecksignal

Man berechne die reelle Fourierreihe des in Abbildung 2 dargestellten periodischen Dreiecksignals.

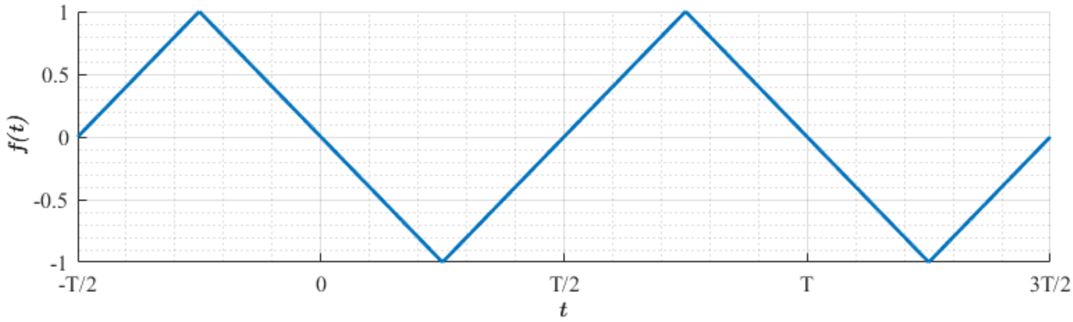

Abbildung 2: T-periodisches Dreiecksignal

Lösung Aufgabe 4.

Für das Dreiecksignal in Abblidung 2 gilt

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{4}{T}t, & 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ \frac{4}{T}t - 2, & \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4} \\ -\frac{4}{T}t + 4, & \frac{3T}{4} \leq t < T \end{cases}$$

und damit $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es folgt $a_0 = a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und für b_k gilt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/4} -\frac{4}{T} t \sin(k\omega t)\, dt \\ &\quad + \frac{2}{T} \int_{T/4}^{3T/4} \left(\frac{4}{T}t - 2 \right) \sin(k\omega t)\, dt \\ &\quad + \frac{2}{T} \int_{3T/4}^{T} \left(-\frac{4}{T}t + 4 \right) \sin(k\omega t)\, dt. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration

$$
\begin{aligned}
\int_a^b t\sin(ct)\,dt &= \left[-\frac{t}{c}\cos(ct)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{1}{c}\cos(ct)\,dt \\
&= \Bigg[\underbrace{\frac{1}{c^2}\sin(ct) - \frac{t}{c}\cos(ct)}_{=:g(t)}\Bigg]_a^b
\end{aligned}
$$

und

$$
\int_a^b \sin(ct)\,dt = \Bigg[\underbrace{-\frac{1}{c}\cos(ct)}_{=:h(t)}\Bigg]_a^b
$$

folgt

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\left(-\frac{4}{T}\left[g(t)\right]_0^{T/4} + \frac{4}{T}\left[g(t)\right]_{T/4}^{3T/4} - 2\left[h(t)\right]_{T/4}^{3T/4} - \frac{4}{T}\left[g(t)\right]_{3T/4}^{T} + 4\left[h(t)\right]_{3T/4}^{T}\right) \\
&= \frac{2}{T}\left(-\frac{8}{T}g(T/4) + \frac{4}{T}g(0) + \frac{8}{T}g(3T/4) - \frac{4}{T}g(T) + 2h(T/4) - 6h(3T/4) + 4h(T)\right) \\
&= \frac{2}{T}\Bigg(-\frac{8}{T}\left[\frac{1}{(k\omega)^2}\sin(k\omega T/4) - \frac{T/4}{k\omega}\cos(k\omega T/4)\right] \\
&\qquad + \frac{4}{T}\left[\frac{1}{(k\omega)^2}\sin(k\omega\cdot 0) - \frac{0}{k\omega}\cos(k\omega\cdot 0)\right] \\
&\qquad + \frac{8}{T}\left[\frac{1}{(k\omega)^2}\sin(k\omega 3T/4) - \frac{3T/4}{k\omega}\cos(k\omega 3T/4)\right] \\
&\qquad - \frac{4}{T}\left[\frac{1}{(k\omega)^2}\sin(k\omega T) - \frac{T}{k\omega}\cos(k\omega T)\right] \\
&\qquad + 2\left[-\frac{1}{k\omega}\cos(k\omega T/4)\right] - 6\left[-\frac{1}{k\omega}\cos(k\omega 3T/4)\right] + 4\left[-\frac{1}{k\omega}\cos(k\omega T)\right]\Bigg).
\end{aligned}
$$

Mit $sin(k\omega T) = 0$, $\cos(k\omega T) = 1$, $\sin(k\omega T/4) = -\sin(k\omega 3T/4)$ und $\cos(k\omega T/4) = \cos(k\omega 3T/4)$ folgt weiterhin

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\left(-\frac{16T}{(k\omega)^2}\sin\left(k\omega\frac{T}{4}\right)\right) \\
&= -\frac{8}{k^2\pi^2}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Die Fourierreihe lautet somit

$$
f(t) = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\sin(k\omega t).
$$

Aufgabe 5. Fourier-Transformation

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
&\lim_{|t|\to\infty} f(t) \to 0\ ,\\
&\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t < \infty \text{ und}\\
&\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\ \mathrm{d}t < \infty\ .
\end{aligned}$$

Man zeige die Beziehung

$$F'(i\omega) = i\omega F(i\omega)$$

mit $\omega \in \mathbb{R}$, zwischen der Fourier-Transformierten $F(i\omega)$ der Funktion $f(t)$ und der Fourier-Transformierten $F'(i\omega)$ der ersten Ableitung $f'(t)$ der Funktion.

Lösung Aufgabe 5.

Mithilfe partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
F'(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\\
&= \underbrace{\left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\\
&= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\\
&= i\omega F(i\omega).
\end{aligned}$$