Carsten Herzog, M. Sc.
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung FT 2021

Übung 1, 19. April 2021

Themen: Fourierreihe, Fourier-Transformation

Eine T-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die Eigenschaft $f(t) = f(t+T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei f weiterhin stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar, dann kann f in eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegt werden. Man nennt diese Zerlegung die *reelle Fourierreihe*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right], \tag{1}$$

wobei $\omega = 2\pi/T$ ist. Die reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \in \mathbb{R}$ sind durch

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{, für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und} \tag{2}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{, für } k \in \mathbb{N} \tag{3}$$

gegeben. Die Konstante $\tau \in \mathbb{R}$ ist dabei beliebig aber fest zu wählen. In der Praxis wird häufig $\tau = 0$ oder $\tau = -T/2$ eingesetzt. Die Funktion f kann ebenso in die *komplexe Fourierreihe*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \tag{4}$$

zerlegt werden, wobei i die imaginäre Einheit ist und für die komplexen Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} f(t)e^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Die Anwendbarkeit der Fourierreihe beschränkt sich auf periodische Funktionen. Wird die Periodendauer T immer weiter ausgedehnt, gelangt man im Grenzfall zu den nicht-periodischen oder auch aperiodischen Vorgängen. Die Fourierreihe geht dann in ein *Fourierintegral*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

mit der *Fourier-Transformierten*

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

über.

Aufgabe 1. T-periodische Funktionen

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion, stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar. Man zeige folgende Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten der reellen und der komplexen Fourierreihe von f für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0, \\ a_k &= c_k + c_{-k}, \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}). \end{aligned}$$

Hinweis: Eulersche Formel: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

Aufgabe 2. Eigenschaften T-periodischer Funktionen

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion, stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar. Man zeige für die Koeffizienten a_k und b_k der reellen Fourierreihe von f folgende Eigenschaften:

1. Ist f *ungerade*, d.h. $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$
2. Ist f *gerade*, d.h. $f(-t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Aufgabe 3. T-periodisches Rechtecksignal

Man berechne die reelle Fourierreihe des in Abbildung 1 dargestellten periodischen Rechtecksignals. An den Sprungstellen nehme das Signal den Wert $f(nT/2) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ an.

Aufgabe 4. T-periodisches Dreiecksignal

Man berechne die reelle Fourierreihe des in Abbildung 2 dargestellten periodischen Dreiecksignals.

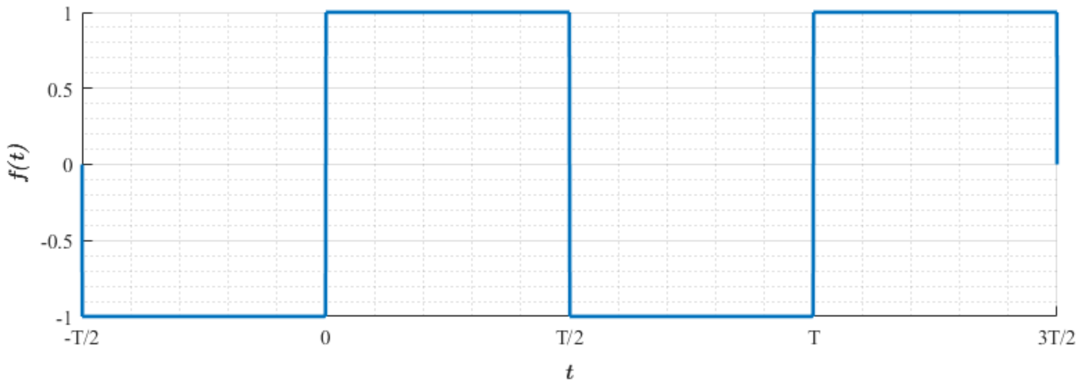

Abbildung 1: T-periodisches Rechtecksignal

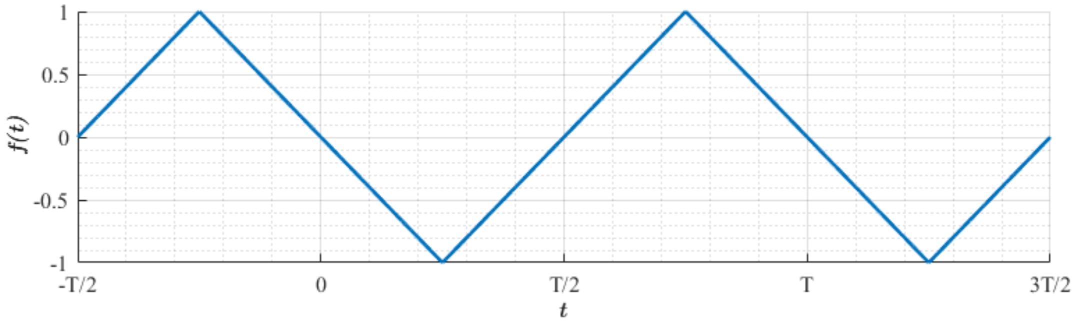

Abbildung 2: T-periodisches Dreiecksignal

Aufgabe 5. Fourier-Transformation

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\lim_{|t|\to\infty} f(t) \to 0\ ,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t < \infty \text{ und}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\ \mathrm{d}t < \infty\ .$$

Man zeige die Beziehung

$$F'(i\omega) = i\omega F(i\omega)$$

mit $\omega \in \mathbb{R}$, zwischen der Fourier-Transformierten $F(i\omega)$ der Funktion $f(t)$ und der Fourier-Transformierten $F'(i\omega)$ der ersten Ableitung $f'(t)$ der Funktion.