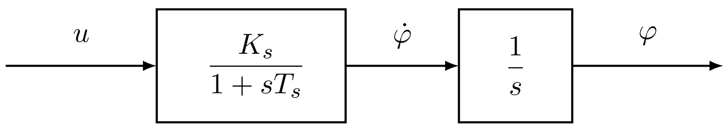
Carsten Herzog, M. Sc.
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung FT 2020

Übung 4 - Lösung

Aufgabe 1. Diskretisierung kontinuierlicher Systeme

Gegeben ist das durch das folgende Blockschaltbild ($T_s > 0$, $K_s > 0$) dargestellte System mit den Übertragungsfunktionen $G_1(s) = \frac{K_s}{1+sT_s}$ und $G_2(s) = \frac{1}{s}$. Dieses konti-



nuierliche System soll im Rahmen dieser Aufgabe diskretisiert werden.

Aufgaben

a) Bestimmen Sie die z-Übertragungsfunktion $G_1(z)$ und die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des gesamten Systems für die Abtastperiode $T > 0$ unter Verwendung von Tabelle 3.3 im Skript S.27.

b) Geben Sie die Differenzengleichung des Abtastsystems an.

Lösung Aufgabe 1. Δ

(i) Nach Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}
G_1(z) &= \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G_1(s)}{s}\right)\Big|_{t=kT}\right) \\
&= \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K_s}{s(1+sT_s)}\right)\Big|_{t=kT}\right) \\
&= K_s \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/T_s}{s(1/T_s+s)}\right)\Big|_{t=kT}\right) \\
&\underset{\text{Tab.3.3 (8)}}{=} K_s \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{(1-e^{-T/T_s})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_s})} \\
&= K_s \cdot \frac{1-e^{-T/T_s}}{z-e^{-T/T_s}}.
\end{aligned}$$

Die Rechnung für $G(z)$ ist umfangreicher:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{G(s)}{s}\Big)\Big|_{t=kT}\right) \\ &= \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{K_s}{s^2(1+sT_s)}\Big)\Big|_{t=kT}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Wir führen die folgende Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{1}{s^2T_s(1/T_s+s)} = \frac{A}{s^2T_s} + \frac{B}{s} + \frac{C}{1/T_s+s}.$$

Es muss gelten:

$$s \cdot (A+B) = 0, \quad A \cdot 1/T_s = 1, \quad s^2 \cdot T_s \cdot (B+C) = 0.$$

Also folgt $A = C = T_S$, $B = -T_s$. D.h.

$$\frac{1}{s^2T_s(1/T_s+s)} = T_s \cdot \Big(\frac{1}{s^2T_s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{1/T_s+s}\Big).$$

Wir führen (1) weiter:

$$\begin{aligned} G(z) &= K_s \cdot T_s \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s^2T_s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{1/T_s+s}\Big)\Big|_{t=kT}\right) \\ &\underset{\text{Tab.3.3}}{=} K_s \cdot T_s \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \Big(\frac{Tz}{T_s(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T/T_s}}\Big) \\ &= K_sT_s \cdot \Big(\frac{T}{T_s(z-1)} - 1 + \frac{z-1}{z-e^{-T/T_s}}\Big). \end{aligned}$$

Wir definieren $z_p = e^{-T/T_s}$. Damit

$$G(z) = K_s \frac{(T - T_s + T_s z_p)z + T_s - z_p(T+T_s)}{(z-1)(z-z_p)}.$$

(ii) Wir schreiben $G_1(z) = \frac{k_1}{z-e^{-T/T_s}}$ mit $k_1 = K_s(1-e^{-T/T_s})$. Dann gilt

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G_1(z) \;\Rightarrow\; Y(z) - e^{-T/T_s}z^{-1}Y(z) = k_1 z^{-1}U(z).$$

Also folgt mit dem Rechtsverschiebungssatz

$$y_{k+1} = e^{-T/T_s}y_k + k_1 u_k.$$

Wir schreiben $G(z) = \frac{k_2 z + k_3}{z^2 - z(1+z_p) + z_p}$ mit $k_2 = K_s(T - T_s + T_s z_p)$ und $k_3 = K_s(T_s - z_p(T - T_s))$. Dann gilt

$$Y(z) - z^{-1}Y(z)(1+z_p) + z^{-2}z_pY(z) = z^{-1}U(z)k_2 + z^{-2}k_3U(z)$$

und somit

$$y_k - (1+z_p)y_{k-1} + z_p y_{k-2} = k_2 u_{k-1} + k_3 u_{k-2}.$$

Aufgabe 2. Polstellen einer z-Übertragungsfunktion
Zeigen Sie, dass die Pole $p_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots m+n$, $m, n \in \mathbb{N}$ einer Übertragungsfunktion der Form

$$G(s) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{s - p_k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\beta_l s}{s - p_l}, \quad \alpha_k, \beta_l \in \mathbb{C}$$

durch die Abbildung $s \mapsto e^{sT}$ zu Polen der z-Übertragungsfunktion werden, d.h. dass $e^{p_k T}$ Pole der z-Übertragungsfunktion der mit Abtastzeit $T > 0$ diskretisierten Strecke sind.

Lösung Aufgabe 2. Ohne Einschränkung seien $\alpha_k \neq 0$, $1 \leq k \leq m$ und wir betrachten nur den Fall $p_k \neq 0$ für alle $1 \leq k \leq m$. Der andere Fall wird analog zum ersten gezeigt. Es gilt für ein Halteglied 0-ter Ordnung

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}(\frac{G(s)}{s})\big|_{t=kT}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1} \frac{\alpha_k}{s(s-p_k)}) + \sum_{l=1}^{n} \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1} \frac{\beta_l}{s-p_l}) = \\
&= \frac{z-1}{z} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{-\alpha_k}{p_k} \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1} \frac{-p_k}{s(s+(-p_k))}) + \sum_{l=1}^{n} \beta_l \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s+(-p_l)}) \right) = \\
&= \frac{z-1}{z} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{-\alpha_k}{p_k} \frac{(1-e^{p_k T})z}{(z-1)(z-e^{p_k T})} + \sum_{l=1}^{n} \beta_l \frac{z}{z-e^{p_l T}} \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{-\alpha_k}{p_k} \frac{1-e^{p_k T}}{z-e^{p_k T}} + \sum_{l=1}^{m} \beta_l \frac{z-1}{z-e^{p_l T}}.
\end{aligned}$$

Also sind $e^{p_k T}$ Pole von $G(z)$ für alle $k = 1, \dots, m+n$.

Aufgabe 3. z-Übertragungsfunktionen
Berechnen Sie die z-Übertragungsfunktion der folgenden zeitdiskreten Systeme mit $y(k) = 0$ für $k \leq 0$, $u(k) = 0$ für $k < 0$ und $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

a) $y(k) + ay(k-1) = bu(k-2)$

b) $y(k+1) + ay(k) + by(k-1) = cu(k) + du(k-1)$

Lösung Aufgabe 3. Δ

(i) Es gilt

$$Y(z) + az^{-1}Y(z) = bz^{-2}U(z) \ \Rightarrow \ \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{bz^{-2}}{1+az^{-1}} = \frac{b}{z^2+az}.$$

(ii) Es gilt

$$Y(z) + az^{-1}Y(z) + bz^{-2}Y(z) = cz^{-1}U(z) + dz^{-2}U(z).$$

Es folgt:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{cz^{-1}+dz^{-2}}{1+az^{-1}+bz^{-2}} = \frac{cz+d}{z^2+az+b}.$$