

Übung 1 - Lösung

Themen: Fourierreihe, Fourier-Transformation

Eine T -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Eigenschaft $f(t) = f(t + T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei f weiterhin stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar, dann kann f in eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegt werden. Man nennt diese Zerlegung die *reelle Fourierreihe*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)], \quad (1)$$

wobei $\omega = 2\pi/T$ ist. Die reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \in \mathbb{R}$ sind durch

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad , \text{ für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und} \quad (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t) \sin(k\omega t) dt \quad , \text{ für } k \in \mathbb{N} \quad (3)$$

gegeben. Die Konstante $\tau \in \mathbb{R}$ ist dabei beliebig aber fest zu wählen. In der Praxis wird häufig $\tau = 0$ oder $\tau = -T/2$ eingesetzt. Die Funktion f kann ebenso in die *komplexe Fourierreihe*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \quad (4)$$

zerlegt werden, wobei i die imaginäre Einheit ist und für die komplexen Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t) e^{-ik\omega t} dt. \quad (5)$$

Die Anwendbarkeit der Fourierreihe beschränkt sich auf periodische Funktionen. Wird die Periodendauer T immer weiter ausgedehnt, gelangt man im Grenzfall zu den nicht-periodischen oder auch aperiodischen Vorgängen. Die Fourierreihe geht dann in ein *Fourierintegral*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

mit der *Fourier-Transformierten*

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

über.

Aufgabe 1. T-periodische Funktionen

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine T -periodische Funktion, stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar. Man zeige folgende Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten der reellen und der komplexen Fourierreihe von f für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}a_0 &= 2c_0, \\a_k &= c_k + c_{-k}, \\b_k &= i(c_k - c_{-k}).\end{aligned}$$

Hinweis: Eulersche Formel: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$

Lösung Aufgabe 1.

$$\begin{aligned}f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)) \\&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_k (\cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)) + c_{-k} (\cos(-k\omega t) + i \sin(-k\omega t))] \\&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_k (\cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)) + c_{-k} (\cos(k\omega t) - i \sin(k\omega t))] \\&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(c_k + c_{-k}) \cos(k\omega t) + i(c_k - c_{-k}) \sin(k\omega t)] \\&\stackrel{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgen die Zusammenhänge $a_0 = 2c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = i(c_k - c_{-k})$.

Aufgabe 2. Eigenschaften T-periodischer Funktionen

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine T -periodische Funktion, stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar. Man zeige für die Koeffizienten a_k und b_k der reellen Fourierreihe von f folgende Eigenschaften:

1. Ist f *ungerade*, d.h. $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$
2. Ist f *gerade*, d.h. $f(-t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Lösung Aufgabe 2.

Für ungerade Funktionen gilt

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 f(t) \cos(k\omega t) dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 -f(-t) \cos(k\omega t) dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(\int_{T/2}^0 -f(u) \cos(-k\omega u) (-du) + \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(- \int_0^{T/2} f(u) \cos(k\omega u) du + \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Der Beweis für gerade Funktionen folgt analog.

Aufgabe 3. T-periodisches Rechtecksignal

Man berechne die reelle Fourierreihe des in Abbildung 1 dargestellten periodischen Rechtecksignals. An den Sprungstellen nehme das Signal den Wert $f(nT/2) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ an.

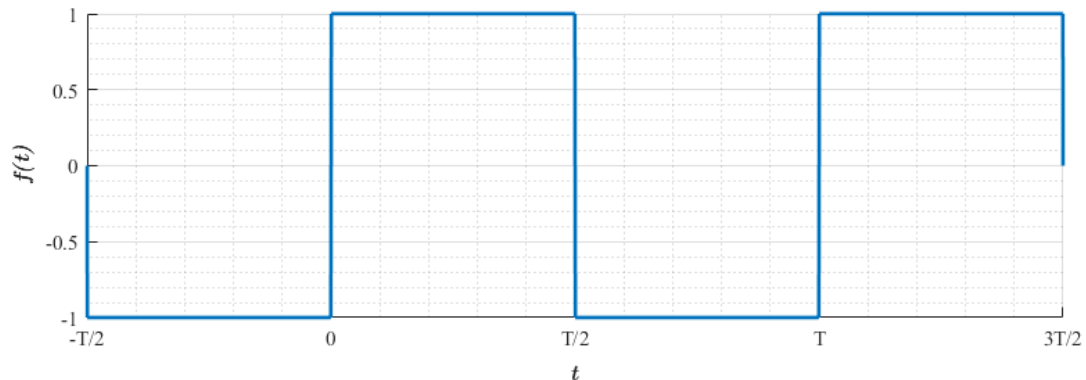


Abbildung 1: T-periodisches Rechtecksignal

Lösung Aufgabe 3.

Für das Rechtecksignal in Abbildung 1 gilt

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, T/2, T \\ 1, & 0 < t < T/2 \\ -1, & T/2 < t < T \end{cases} .$$

Es handelt sich also um eine ungerade Funktion mit $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit folgt $a_0 = a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und für b_k gilt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} 1 \cdot \sin(k\omega t) dt + \int_{T/2}^T (-1) \cdot \sin(k\omega t) dt \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(\left[-\frac{1}{k\omega} \cos(k\omega t) \right]_0^{T/2} + \left[\frac{1}{k\omega} \cos(k\omega t) \right]_{T/2}^T \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(-\frac{1}{k\omega} \cos(k\pi) + \frac{1}{k\omega} \cos(0) + \frac{1}{k\omega} \cos(k2\pi) - \frac{1}{k\omega} \cos(k\pi) \right) \\ &= \frac{2}{k\omega T} (2 - 2 \cos(k\pi)) . \end{aligned}$$

Mit

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1, & k \equiv 0 \pmod{2} \\ -1, & k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

folgt schließlich

$$b_k = \frac{2}{k\pi}(1 - (-1)^k).$$

Die Schreibweise $k \equiv 1 \pmod{2}$ bedeutet, dass $k - 1$ durch 2 ganzzahlig teilbar ist. Die Fourierreihe lautet damit

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (1 - (-1)^k) \sin(k\omega t).$$

Man erkennt, dass die Fourierreihe an den Stellen $t = nT/2$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gleich dem Funktionswert $f(nT/2) = 0$ ist. Wäre in der Definition der Funktion beispielsweise $f(nT/2) = 1$ gesetzt worden, ergäben sich die gleichen Koeffizienten und die Fourierreihe würde an den Stellen $t = nT/2$ vom Funktionswert abweichen. Folglich ist bei der Entwicklung von Fourierreihen besonders auf das Verhalten an Sprungstellen zu achten.

Aufgabe 4. T-periodisches Dreiecksignal

Man berechne die reelle Fourierreihe des in Abbildung 2 dargestellten periodischen Dreiecksignals.

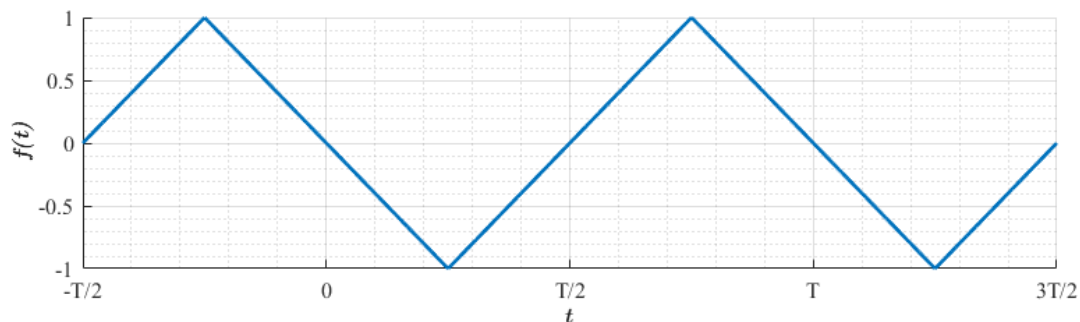


Abbildung 2: T-periodisches Dreiecksignal

Lösung Aufgabe 4.

Für das Dreiecksignal in Abbildung 2 gilt

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{4}{T}t, & 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ \frac{4}{T}t - 2, & \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4} \\ -\frac{4}{T}t + 4, & \frac{3T}{4} \leq t < T \end{cases}$$

und damit $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es folgt $a_0 = a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und für b_k gilt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/4} -\frac{4}{T}t \sin(k\omega t) dt \\ &\quad + \frac{2}{T} \int_{T/4}^{3T/4} \left(\frac{4}{T}t - 2\right) \sin(k\omega t) dt \\ &\quad + \frac{2}{T} \int_{3T/4}^T \left(-\frac{4}{T}t + 4\right) \sin(k\omega t) dt. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_a^b t \sin(ct) dt &= \left[-\frac{t}{c} \cos(ct) \right]_a^b - \int_a^b -\frac{1}{c} \cos(ct) dt \\ &= \left[\underbrace{\frac{1}{c^2} \sin(ct) - \frac{t}{c} \cos(ct)}_{=:g(t)} \right]_a^b \end{aligned}$$

und

$$\int_a^b \sin(ct) dt = \left[\underbrace{-\frac{1}{c} \cos(ct)}_{=:h(t)} \right]_a^b$$

folgt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \left(-\frac{4}{T} [g(t)]_0^{T/4} + \frac{4}{T} [g(t)]_{T/4}^{3T/4} - 2 [h(t)]_{T/4}^{3T/4} - \frac{4}{T} [g(t)]_{3T/4}^T + 4 [h(t)]_{3T/4}^T \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(-\frac{8}{T} g(T/4) + \frac{4}{T} g(0) + \frac{8}{T} g(3T/4) - \frac{4}{T} g(T) + 2h(T/4) - 6h(3T/4) + 4h(T) \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(-\frac{8}{T} \left[\frac{1}{(k\omega)^2} \sin(k\omega T/4) - \frac{T/4}{k\omega} \cos(k\omega T/4) \right] \right. \\ &\quad + \frac{4}{T} \left[\frac{1}{(k\omega)^2} \sin(k\omega \cdot 0) - \frac{0}{k\omega} \cos(k\omega \cdot 0) \right] \\ &\quad + \frac{8}{T} \left[\frac{1}{(k\omega)^2} \sin(k\omega 3T/4) - \frac{3T/4}{k\omega} \cos(k\omega 3T/4) \right] \\ &\quad - \frac{4}{T} \left[\frac{1}{(k\omega)^2} \sin(k\omega T) - \frac{T}{k\omega} \cos(k\omega T) \right] \\ &\quad \left. + 2 \left[-\frac{1}{k\omega} \cos(k\omega T/4) \right] - 6 \left[-\frac{1}{k\omega} \cos(k\omega 3T/4) \right] + 4 \left[-\frac{1}{k\omega} \cos(k\omega T) \right] \right). \end{aligned}$$

Mit $\sin(k\omega T) = 0$, $\cos(k\omega T) = 1$, $\sin(k\omega T/4) = -\sin(k\omega 3T/4)$ und $\cos(k\omega T/4) = \cos(k\omega 3T/4)$ folgt weiterhin

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \left(-\frac{16T}{(k\omega)^2} \sin\left(k\omega \frac{T}{4}\right) \right) \\ &= -\frac{8}{k^2 \pi^2} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Die Fourierreihe lautet somit

$$f(t) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) \sin(k\omega t).$$

Aufgabe 5. Fourier-Transformation

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) &\rightarrow 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt &< \infty \text{ und} \\ \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)| dt &< \infty. \end{aligned}$$

Man zeige die Beziehung

$$F'(i\omega) = i\omega F(i\omega)$$

mit $\omega \in \mathbb{R}$, zwischen der Fourier-Transformierten $F(i\omega)$ der Funktion $f(t)$ und der Fourier-Transformierten $F'(i\omega)$ der ersten Ableitung $f'(t)$ der Funktion.

Lösung Aufgabe 5.

Mithilfe partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} F'(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \underbrace{[f(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\omega)e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega F(i\omega). \end{aligned}$$