

## Übung 1, 27. April 2020

**Themen:** Fourierreihe, Fourier-Transformation

Eine  $T$ -periodische Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat die Eigenschaft  $f(t) = f(t + T)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Sei  $f$  weiterhin stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar, dann kann  $f$  in eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegt werden. Man nennt diese Zerlegung die *reelle Fourierreihe*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)], \quad (1)$$

wobei  $\omega = 2\pi/T$  ist. Die reellen Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{R}$  und  $b_k \in \mathbb{R}$  sind durch

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad , \text{ für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und} \quad (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t) \sin(k\omega t) dt \quad , \text{ für } k \in \mathbb{N} \quad (3)$$

gegeben. Die Konstante  $\tau \in \mathbb{R}$  ist dabei beliebig aber fest zu wählen. In der Praxis wird häufig  $\tau = 0$  oder  $\tau = -T/2$  eingesetzt. Die Funktion  $f$  kann ebenso in die *komplexe Fourierreihe*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \quad (4)$$

zerlegt werden, wobei  $i$  die imaginäre Einheit ist und für die komplexen Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  gilt

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t) e^{-ik\omega t} dt. \quad (5)$$

Die Anwendbarkeit der Fourierreihe beschränkt sich auf periodische Funktionen. Wird die Periodendauer  $T$  immer weiter ausgedehnt, gelangt man im Grenzfall zu den nicht-periodischen oder auch aperiodischen Vorgängen. Die Fourierreihe geht dann in ein *Fourierintegral*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

mit der *Fourier-Transformierten*

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

über.

### Aufgabe 1. T-periodische Funktionen

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $T$ -periodische Funktion, stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar. Man zeige folgende Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten der reellen und der komplexen Fourierreihe von  $f$  für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0, \\ a_k &= c_k + c_{-k}, \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}). \end{aligned}$$

Hinweis: Eulersche Formel:  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$

### Aufgabe 2. Eigenschaften T-periodischer Funktionen

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $T$ -periodische Funktion, stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar. Man zeige für die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  der reellen Fourierreihe von  $f$  folgende Eigenschaften:

1. Ist  $f$  *ungerade*, d.h.  $f(-t) = -f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , so folgt  $a_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$
2. Ist  $f$  *gerade*, d.h.  $f(-t) = f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , so folgt  $b_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$

### Aufgabe 3. T-periodisches Rechtecksignal

Man berechne die reelle Fourierreihe des in Abbildung 1 dargestellten periodischen Rechtecksignals. An den Sprungstellen nehme das Signal den Wert  $f(nT/2) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  an.

### Aufgabe 4. T-periodisches Dreiecksignal

Man berechne die reelle Fourierreihe des in Abbildung 2 dargestellten periodischen Dreiecksignals.

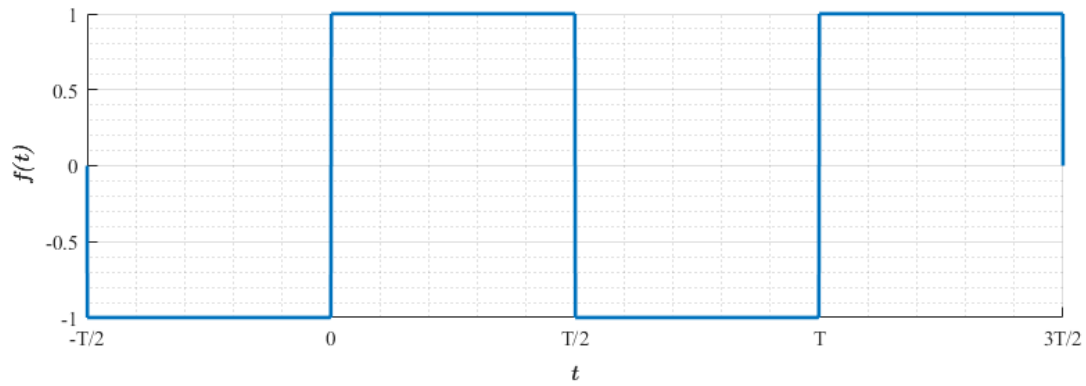


Abbildung 1: T-periodisches Rechtecksignal

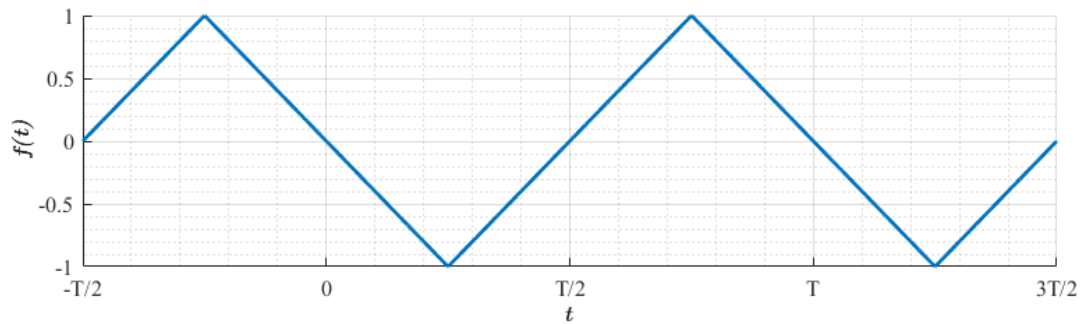


Abbildung 2: T-periodisches Dreiecksignal

### Aufgabe 5. Fourier-Transformation

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) &\rightarrow 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt &< \infty \text{ und} \\ \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)| \, dt &< \infty. \end{aligned}$$

Man zeige die Beziehung

$$F'(i\omega) = i\omega F(i\omega)$$

mit  $\omega \in \mathbb{R}$ , zwischen der Fourier-Transformierten  $F(i\omega)$  der Funktion  $f(t)$  und der Fourier-Transformierten  $F'(i\omega)$  der ersten Ableitung  $f'(t)$  der Funktion.