F. Goßmann M.Sc
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung FT 2019

Übung 6, 8. Juli 2019

Aufgabe 1. Inverses Pendel

Es wird ein Pendel von Masse m und Länge l betrachtet, das wie in Abb. 1 dargestellt, auf einen Wagen montiert ist. Die Beschleunigung u des Wagens stellt die Stellgröße dar. Die Masse des Stabs wird vernachlässigt.

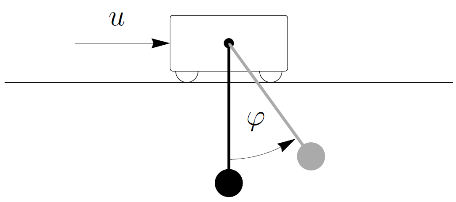

Abbildung 1: Pendel-Wagen-System

Aufgaben

a) Verifizieren Sie, dass die Dynamik des Systems durch die folgende Differentialgleichung gegeben ist (g ist die Erdbeschleunigung und γ ist der Reibungskoeffizient für die Reibung am Aufhängepunkt des Pendels):

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin(\varphi) - \frac{\omega^2}{g} \cos(\varphi) \cdot u - \gamma \dot{\varphi}. \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Konstante ω in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment J am Aufhängepunkt sowie den Größen g, m und l.

b) Linearisieren Sie (1) um die Ruhelage $(\varphi, \dot{\varphi}) = (\pi, 0)$ und $u = 0$, und bestimme die Übertragungsfunktion $G(s)$ des linearisierten Systems.

c) Bestimmen Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des diskretisierten (und linearisierten) Systems, welches mit Periode $T > 0$ abgetastet wird. Man berechne nur den Fall $\gamma = 0$.

Aufgaben

d) Überführen Sie das linearisierte Pendel-Wagen-System in ein (kontinuierliches) Zustandsraummodell der Form $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t)$, $y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t)$ (wenn φ die einzige Ausgangsgröße ist).

e) Bestimme Sie das äquivalente zeitdiskrete Zustandsraummodell

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_d u(k), \quad y(k) = \mathbf{c}_d^T\mathbf{x}(k) \tag{2}$$

für den Fall $\gamma = 0$ und die Abtastzeit $T > 0$.

Aufgabe 2. w-Transformation

Beweisen Sie im Detail folgende Eigenschaft der in der Vorlesung eingeführten w-Transformation. Sei $C(X) = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_0$ ein reelles Polynom vom Grad $n > 0$ (d.h. $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \neq 0$) und sei $\widetilde{C}(X)$ ein Polynom definiert durch

$$\widetilde{C}(X) := (1-X)^n C\Big(\frac{1+X}{1-X}\Big).$$

Dann gilt: Ist $\widetilde{C}$ ein Hurwitz-Polynom vom Grad n, so liegen alle Nullstellen von C im Inneren des Einheitskreises. Zeigen Sie also

$$\Big(\big(\widetilde{C}(w) = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{Re} w < 0\big) \text{ und } \deg \widetilde{C} = n\Big) \;\Rightarrow\; \big(C(z) = 0 \;\Rightarrow\; |z| < 1\big).$$