

Digitale Regelung FT 2019

## Übung 3, 27. Mai 2019

**Thema:** z-Transformation

### Aufgabe 1. z-Transformation von Folgen

Gegeben sind die Folgen  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$

- $f_k = (-a)^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $|z| > |a| \geq 1$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .
- $f_k = \begin{cases} 1, & k = 0, 2, 4, \dots \\ 0, & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$
- $f_k = \frac{1}{2}(kT)^2$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $T > 0$ .
- $f_k = \frac{T^2}{2}k(k-1)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T > 0$ .
- $f_k = \sin(k\omega T)$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\omega > 0$ ,  $T > 0$ .

Bestimmen Sie die z-Transformation

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k},$$

für alle gegebenen Folgen. Es gilt  $|z| > 1$ , sowie

$$\sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^{-k} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}. \quad (2)$$

für  $|z| > 1$

## Aufgabe 2. Residuenmethode

Die  $z$ -Transformation einer Folge  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  ist durch

a)

$$F(z) = \frac{z - a}{(z - b)(z - c)}$$

mit  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $b \neq c$ ;

b)

$$F(z) = \frac{z}{(z - 1)^2}.$$

gegeben. Bestimmen Sie jeweils die Folge  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  mittels der Residuenmethode (siehe Skript).

## Aufgabe 3. Differenzgleichungen

Für  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon \in \{0, 1\}$  und die Folge  $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$  ist durch

$$y_k = \alpha y_{k-1} + \beta u_{k-\epsilon} \quad (3)$$

eine Differenzgleichung gegeben. Wird ein  $PT_1$ -System gegeben durch  $T_1 \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$  mit Periode  $T > 0$  abgetastet und  $\dot{y}(kT)$  durch den Rückwärtsdifferenzenquotienten  $\frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T} = \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$  approximiert, so entsteht laut Vorlesung eine Differenzgleichung der Form (3) mit Konstanten

$$\alpha = T_1 / (T + T_1), \quad \beta = T / (T + T_1), \quad \epsilon = 0. \quad (4)$$

## Aufgaben

a) Verifizieren Sie, dass die durch (3) gegebene Folge  $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  durch

$$y_k = \alpha^k y_0 + \beta \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha^\nu u_{k-\epsilon-\nu} \quad (5)$$

und  $y_0 \in \mathbb{R}$  berechnet werden kann.

b) Sei  $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$  gegeben durch  $u_\nu = 0$  für alle  $\nu < 0$  und  $u_\nu = 1$  für alle  $\nu \geq 0$  (Sprungfolge). Diskutieren Sie die Existenz des Grenzwertes  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k$  in Abhängigkeit von  $\alpha$ .

*Hinweis:* Es gilt  $\sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha^\nu = \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$  für  $\alpha \neq 1$ .

c) Berechnen Sie für ein  $PT_1$ -System die Konstanten  $\alpha, \beta$  und  $\epsilon$  in (3), wenn für  $\dot{y}(kT)$  der Vorwärtsdifferenzenquotient  $\frac{y_{k+1} - y_k}{T}$  verwendet wird.

d) Diskutieren Sie den Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k$  für die in (4) und in (c) gegebenen Diskretisierungen eines  $PT_1$ -Systems.