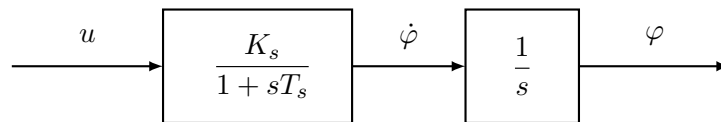


## Übung 4 - Lösung

### Aufgabe 1. Diskretisierung kontinuierlicher Systeme

Gegeben ist das durch das folgende Blockschaltbild ( $T_s > 0$ ,  $K_s > 0$ ) dargestellte System mit den Übertragungsfunktionen  $G_1(s) = \frac{K_s}{1+sT_s}$  und  $G_2(s) = \frac{1}{s}$ . Dieses konti-



nuierliche System soll im Rahmen dieser Aufgabe diskretisiert werden.

### Aufgaben

- Bestimmen Sie die  $z$ -Übertragungsfunktion  $G_1(z)$  und die  $z$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$  des gesamten Systems für die Abtastperiode  $T > 0$  unter Verwendung von Tabelle 3.3 im Skript S.27.
- Geben Sie die Differenzengleichung des Abtastsystems an.

### Lösung Aufgabe 1. $\Delta$

(i) Nach Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}
 G_1(z) &= \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left( \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{G_1(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right) \\
 &= \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left( \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{K_s}{s(1+sT_s)} \right) \Big|_{t=kT} \right) \\
 &= K_s \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left( \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1/T_s}{s(1/T_s+s)} \right) \Big|_{t=kT} \right) \\
 &\stackrel{\text{Tab.3.3 (8)}}{=} K_s \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{(1-e^{-T/T_s})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_s})} \\
 &= K_s \cdot \frac{1-e^{-T/T_s}}{z-e^{-T/T_s}}.
 \end{aligned}$$

Die Rechnung für  $G(z)$  ist umfangreicher:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left( \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right) \\ &= \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left( \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{K_s}{s^2(1+sT_s)} \right) \Big|_{t=kT} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Wir führen die folgende Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{1}{s^2 T_s (1/T_s + s)} = \frac{A}{s^2 T_s} + \frac{B}{s} + \frac{C}{1/T_s + s}.$$

Es muss gelten:

$$s \cdot (A + B) = 0, \quad A \cdot 1/T_s = 1, \quad s^2 \cdot T_s \cdot (B + C) = 0.$$

Also folgt  $A = C = T_s$ ,  $B = -T_s$ . D.h.

$$\frac{1}{s^2 T_s (1/T_s + s)} = T_s \cdot \left( \frac{1}{s^2 T_s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{1/T_s + s} \right).$$

Wir führen (1) weiter:

$$\begin{aligned} G(z) &= K_s \cdot T_s \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left( \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^2 T_s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{1/T_s + s} \right) \Big|_{t=kT} \right) \\ &\stackrel{\text{Tab.3.3}}{=} K_s \cdot T_s \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \left( \frac{Tz}{T_s(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T/T_s}} \right) \\ &= K_s T_s \cdot \left( \frac{T}{T_s(z-1)} - 1 + \frac{z-1}{z - e^{-T/T_s}} \right). \end{aligned}$$

Wir definieren  $z_p = e^{-T/T_s}$ . Damit

$$G(z) = K_s \frac{(T - T_s + T_s z_p)z + T_s - z_p(T + T_s)}{(z-1)(z-z_p)}.$$

(ii) Wir schreiben  $G_1(z) = \frac{k_1}{z - e^{-T/T_s}}$  mit  $k_1 = K_s(1 - e^{-T/T_s})$ . Dann gilt

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G_1(z) \Rightarrow Y(z) - e^{-T/T_s} z^{-1} Y(z) = k_1 z^{-1} U(z).$$

Also folgt mit dem Rechtsverschiebungssatz

$$y_{k+1} = e^{-T/T_s} y_k + k_1 u_k.$$

Wir schreiben  $G(z) = \frac{k_2 z + k_3}{z^2 - z(1+z_p) + z_p}$  mit  $k_2 = K_s(T - T_s + T_s z_p)$  und  $k_3 = K_s(T_s - z_p(T - T_s))$ . Dann gilt

$$Y(z) - z^{-1} Y(z)(1 + z_p) + z^{-2} z_p Y(z) = z^{-1} U(z) k_2 + z^{-2} k_3 U(z)$$

und somit

$$y_k - (1 + z_p) y_{k-1} + z_p y_{k-2} = k_2 u_{k-1} + k_3 u_{k-2}.$$

### Aufgabe 2. Polstellen einer $z$ -Übertragungsfunktion

Zeigen Sie, dass die Pole  $p_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, \dots, m+n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  einer Übertragungsfunktion der Form

$$G(s) = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{s - p_k} + \sum_{l=1}^n \frac{\beta_l s}{s - p_l}, \quad \alpha_k, \beta_l \in \mathbb{C}$$

durch die Abbildung  $s \mapsto e^{sT}$  zu Polen der  $z$ -Übertragungsfunktion werden, d.h. dass  $e^{p_k T}$  Pole der  $z$ -Übertragungsfunktion der mit Abtastzeit  $T > 0$  diskretisierten Strecke sind.

**Lösung Aufgabe 2.** Ohne Einschränkung seien  $\alpha_k \neq 0$ ,  $1 \leq k \leq m$  und wir betrachten nur den Fall  $p_k \neq 0$  für alle  $1 \leq k \leq m$ . Der andere Fall wird analog zum ersten gezeigt. Es gilt für ein Halteglied 0-ter Ordnung

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}(\frac{G(s)}{s})|_{t=kT}) = \sum_{k=1}^m \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1} \frac{\alpha_k}{s(s-p_k)}) + \sum_{l=1}^n \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1} \frac{\beta_l}{s-p_l}) = \\ &= \frac{z-1}{z} \left( \sum_{k=1}^m \frac{-\alpha_k}{p_k} \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1} \frac{-p_k}{s(s+(-p_k))}) + \sum_{l=1}^n \beta_l \mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s+(-p_l)}) \right) = \\ &= \frac{z-1}{z} \left( \sum_{k=1}^m \frac{-\alpha_k}{p_k} \frac{(1-e^{p_k T})z}{(z-1)(z-e^{p_k T})} + \sum_{l=1}^n \beta_l \frac{z}{z-e^{p_l T}} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{-\alpha_k}{p_k} \frac{1-e^{p_k T}}{z-e^{p_k T}} + \sum_{l=1}^n \beta_l \frac{z-1}{z-e^{p_l T}}. \end{aligned}$$

Also sind  $e^{p_k T}$  Pole von  $G(z)$  für alle  $k = 1, \dots, m+n$ .

### Aufgabe 3. $z$ -Übertragungsfunktionen

Berechnen Sie die  $z$ -Übertragungsfunktion der folgenden zeitdiskreten Systeme mit  $y(k) = 0$  für  $k \leq 0$ ,  $u(k) = 0$  für  $k < 0$  und  $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ .

a)  $y(k) + ay(k-1) = bu(k-2)$

b)  $y(k+1) + ay(k) + by(k-1) = cu(k) + du(k-1)$

### Lösung Aufgabe 3. $\Delta$

(i) Es gilt

$$Y(z) + az^{-1}Y(z) = bz^{-2}U(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{bz^{-2}}{1+az^{-1}} = \frac{b}{z^2+az}$$

(ii) Es gilt

$$Y(z) + az^{-1}Y(z) + bz^{-2}Y(z) = cz^{-1}U(z) + dz^{-2}U(z).$$

Es folgt:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{cz^{-1} + dz^{-2}}{1 + az^{-1} + bz^{-2}} = \frac{cz + d}{z^2 + az + b}$$