Prof. F. Svaricek
Universität der Bundeswehr München
Institut für Steuer- und Regelungstechnik (LRT-15)

Digitale Regelung

Übung 6 - Lösung

Aufgabe 1. Man betrachte ein Pendel von Masse m und Länge l, das auf einen Wagen montiert ist, so wie in Abb. 1 dargestellt. Die Beschleunigung u des Wagens sei eine Stellgröße. Die Masse des Stabs werde vernachlässigt.

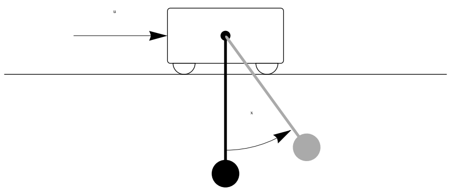

Abbildung 1: Pendel-Wagen-System

(i) Man verifiziere, dass die Dynamik des Systems durch die folgende Differentialgleichung gegeben ist (g sei die Erdbeschleunigung, γ sei der Reibungskoeffizient für die Reibung am Aufhängepunkt des Pendels):

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin(\varphi) - \frac{\omega^2}{g} \cos(\varphi) \cdot u - \gamma \dot{\varphi}. \tag{1}$$

Man bestimme die Konstante ω in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment J am Aufhängepunkt sowie den Größen g, m und l.

(ii) Man linearisiere (1) um die Ruhelage $(\varphi, \dot{\varphi}) = (\pi, 0)$ und $u = 0$, und bestimme die Übertragungsfunktion $G(s)$ des linearisierten Systems.

(iii) Man bestimme die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des diskretisierten (und linearisierten) Systems, welches mit Periode $T > 0$ abgetastet wird. Man berechne nur den Fall $\gamma = 0$.

(iv) Man führe das linearisierte Pendel-Wagen-System in ein (kontinuierliches) Zustandsraummodell der Form $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$, $y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t)$ über (wenn φ die einzige Ausgangsgröße ist).

(v) Man bestimme das äquivalente zeitdiskrete Zustandsraummodell

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_d u(k), \quad y(k) = \mathbf{c}_d^T\mathbf{x}(k) \tag{2}$$

für den Fall $\gamma = 0$ und die Abtastzeit $T > 0$.

Lösung Aufgabe 1. (i) Durch Betrachtung der anliegenden Momente am Aufhängepunkt erhalten wir

$$-J\ddot{\varphi} = l \cdot (\tilde{F}_G + \tilde{F}_u) + M_R,$$

wobei $\tilde{F}_G = m \cdot g \cdot l \sin(\varphi)$ und $\tilde{F}_u = m \cdot u \cdot l \cos(\varphi)$ (die Masse des Pendelarmes sei vernachlässigt). M_R ist das Reibungsmoment am Aufhängepunkt (M_R ist proportional zu $\dot{\varphi}$). Daher folgt (1) mit

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}.$$

(ii) Wir können (1) auch als System 1. Ordnung schreiben. Mit den neuen Variablen $x_1 = \varphi$ und $x_2 = \dot{\varphi}$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega^2 \sin x_1 - \frac{\omega^2}{g} \cdot u \cdot \cos x_1 - \gamma x_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Wir bezeichnen die rechte Seite von (3) mit F, d.h. $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Das um $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$ (und $u = 0$) linearisierte Modell $\dot{x} = A(x - (\pi, 0)) + Bu$ erhalten wir wie folgt ($x = (x_1, x_2)^T$):

$$A = \frac{\partial F(\cdot, 0)}{\partial x}\Big|_{x=(\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\gamma \end{pmatrix},$$

und

$$B = \frac{\partial F((\pi, 0), \cdot)}{\partial u}\Big|_{u=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega^2}{g} \end{pmatrix}.$$

Das linearisierte System ist demnach gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - \pi \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2/g \end{pmatrix} u.$$

Wir definieren $\tilde{\varphi} = \varphi - \pi$. Dann gilt

$$\ddot{\tilde{\varphi}} = \omega^2 \tilde{\varphi} + \frac{\omega^2}{g} u - \gamma \dot{\tilde{\varphi}}.$$

Mittels Laplace-Transformation erhalten wir

$$s^2 \Phi(s) = \omega^2 \Phi(s) - \gamma s \Phi(s) + (\omega^2/g) U(s)$$

und damit die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\omega^2}{s^2 - \omega^2 + s\gamma}.$$

(iii) Es sei $\gamma = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{g}\cdot\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}(\frac{\omega^2}{s(s^2-\omega^2)})\big|_{t=kT}) = \\
&= \frac{1}{g}\cdot\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2-\omega^2}-\frac{1}{s})\big|_{t=kT}) = \\
&= \frac{1}{g}\cdot\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}(\mathcal{L}^{-1}(\frac{1/2}{s-\omega}+\frac{1/2}{s+\omega}-\frac{1}{s})\big|_{t=kT}) \\
&= \frac{1}{g}\frac{z-1}{z}\Big(\frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{\omega T}}+\frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-\omega T}}-\frac{z}{z-1}\Big) = \\
&= \frac{1}{g}\Big(\frac{1}{2}\frac{z-1}{z-e^{\omega T}}+\frac{1}{2}\frac{z-1}{z-e^{-\omega T}}-1\Big).
\end{aligned}$$

(iv) Siehe (ii) und $c = (1,0)^T$.

(v) Nach Vorlesung gilt

$$\mathbf{A}_d = e^{AT}, \quad \mathbf{B}_d = \int_0^T e^{A\tau}Bd\tau, \quad \mathbf{c}_d = c = (1,0).$$

Wir müssen also für

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}\tau \tag{4}$$

die Matrix-Exponentialfunktion bestimmen. Die Eigenwerte von A sind ω and $-\omega$ und die zugehörigen Eigenvektoren $(1,\omega)^T$ bzw. $(-1,\omega)^T$. Wir diagonalisieren (4) vermöge

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega & \omega \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann

$$P^{-1}AP = \underbrace{\frac{1}{2\omega}\begin{pmatrix} \omega & 1 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$e^{A\tau} = P\begin{pmatrix} e^{\omega\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\omega\tau} \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\omega\tau}+e^{-\omega\tau}}{2} & \frac{e^{\omega\tau}-e^{-\omega\tau}}{2\omega} \\ \frac{\omega e^{\omega\tau}-\omega e^{-\omega\tau}}{2} & \frac{e^{\omega\tau}+e^{-\omega\tau}}{2} \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{A\tau}Bd\tau &= \int_0^T \begin{pmatrix} \frac{e^{\omega\tau}+e^{-\omega\tau}}{2} & \frac{e^{\omega\tau}-e^{-\omega\tau}}{2\omega} \\ \frac{\omega e^{\omega\tau}-\omega e^{-\omega\tau}}{2} & \frac{e^{\omega\tau}+e^{-\omega\tau}}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2/g \end{pmatrix}d\tau = \frac{1}{g}\int_0^T \begin{pmatrix} \frac{\omega}{2}(e^{\omega\tau}-e^{-\omega\tau}) \\ \frac{\omega^2}{2}(e^{\omega\tau}+e^{-\omega\tau}) \end{pmatrix}d\tau = \\
&= \frac{1}{g}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{\omega T}+e^{-\omega T}-2) \\ \frac{\omega}{2}(e^{\omega T}-e^{-\omega T}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. (w-Transformation)
Man beweise im Detail folgende Eigenschaft der in der Vorlesung eingeführten w-Transformation. Sei $C(X) = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_0$ ein reelles Polynom vom

Grad $n > 0$ (d.h. $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \neq 0$) und sei $\widetilde{C}(X)$ ein Polynom definiert durch

$$\widetilde{C}(X) := (1-X)^n C\Big(\frac{1+X}{1-X}\Big).$$

Dann gilt: Ist $\widetilde{C}$ ein Hurwitz-Polynom vom Grad n, so liegen alle Nullstellen von C im Inneren des Einheitskreises. Man zeige also

$$\Big(\big(\widetilde{C}(w) = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{Re} w < 0\big) \text{ und } \deg \widetilde{C} = n\Big) \;\Rightarrow\; \big(C(z) = 0 \;\Rightarrow\; |z| < 1\big).$$

Lösung Aufgabe 2. Sei $C(z) = 0$ für ein $z \in \mathbb{C}$. Wir müssen beweisen, dass $|z| < 1$. Wir nehmen zunächst $z \neq -1$ an und definieren

$$w = \frac{z-1}{z+1}.$$

Dann gilt $\widetilde{C}(w) = (1-w)^n C(z) = 0$, also gilt $\operatorname{Re} w < 0$, denn $\widetilde{C}$ ist als Hurwitz vorausgesetzt. Da nun

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

gilt

$$\begin{aligned}|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \frac{1+w}{1-w} \cdot \frac{1+\bar{w}}{1-\bar{w}} &= \frac{1 + 2\operatorname{Re} w + |w|^2}{1 - 2\operatorname{Re} w + |w|^2} \\ &< \frac{1 + 2\operatorname{Re} w + |w|^2}{1 + |w|^2} < \frac{1 + |w|^2}{1 + |w|^2} = 1,\end{aligned}$$

das war zu zeigen. Ist nun $z = -1$, d.h. $C(-1) = 0$, so schreiben wir $C(X) = (1+X)^k C_1(X)$ mit einem reellen Polynom C_1, welches $C_1(-1) \neq 0$ erfüllt. Daher ist

$$\widetilde{C}(X) = (1-X)^n \cdot (1 + \frac{1+X}{1-X})^k C_1(\frac{1+X}{1-X}) = (1-X)^{n-k} \cdot 2^k \cdot C_1(\frac{1+X}{1-X}),$$

also ist $n-k$ der Grad von $\widetilde{C}$, also kleiner als n, Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. $C(-1) \neq 0$.